

数学分析(A1), 第1次课

任广斌(中国科大)

2023-9-11

- 助教：张皓哲, 吴舒涵, 黄科深

- 教材：

- 常庚哲、史济怀《数学分析教程》

- 参考文献：

- 主要参考书：

- Zorich 《数学分析》

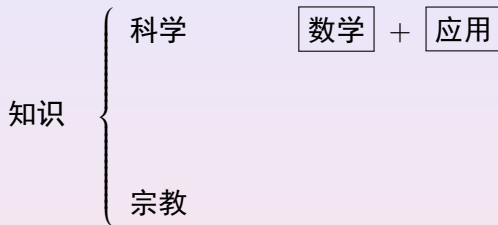
- 习题：

- 谢惠民《数学分析习题课讲义》，周明强, 裴礼文, 楼红卫

- 其他：

- 华罗庚, Rudin, 菲赫金哥尔茨, 克莱鲍尔, 齐民友,

人类智慧的结晶



数学是人类的眼镜， 人类是宇宙的眼睛。

- 计算 π 神奇公式 (Ramanujan):

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103 + 26390k)}{396^{4k}(k!)^4}$$

一般项的阶: $a_k = O\left(\frac{k}{(99)^{4k}}\right)$.

从分析的角度看宇宙：数学是宇宙的语言

- 相对论:

时空是Minkowski流形

流形上微积分

- 量子物理:

可观察量=Hilbert空间中的自伴算子

泛函分析谱理论

- 规范场物理和Maxwell方程组的统一

宇宙规则: 选取联络使得曲率最小

近代微分几何

从分析的角度看数学

- 分析：
 - 数学分析 (导数和积分)
 - 复分析 ($\mathbb{C}$ 上数学分析)
 - 实分析 (什么是积分, 积分定义的最广场所)
 - 泛函分析 (无限维数学分析)
 - 偏微分方程 (数学分析的应用)
 - 概率论 (数学分析的拓展)
- 代数
 - 线性代数 (数学分析线性化)
 - 抽象代数 (什么是加减乘除)
- 几何
 - 微分几何 (什么导数, 导数定义的最广场所)
 - 点集拓扑 (什么是连续)

课程内容： 周六，120学时

第1-2章	极限	
第3-4章	导数	Taylor定理
第5-7章	积分	Riemann定理

课程内容

- 函数.

初等函数	$C^\omega[a, b]$	$C^k[a, b]$	$R[a, b]$	$L^2[a, b]$
	Taylor理论	微分学	积分学	实分析

- 极限(从量变到质变, 从常规到异常)

信息用一系列数传递, 扩充知识的工具, 探索宇宙奥秘的明灯

- 微积分基本定理(双射)

$$C[a, b] \begin{matrix} \xrightarrow{\int_a^x} \\ \xleftarrow{\frac{d}{dx}} \end{matrix} C^1[a, b]/\mathbb{R}$$

线性化是研究非线性的工具,

极限=级数=积分=求导

数学分析万花筒

数学分析万花筒中的素材:

- 研究对象: 初等函数
- 一对互逆运算: 求导和积分.

它们来自极限: 极限颠覆认知.

它们派生出微积分的顶峰——带积分余项的Taylor展开.

局部的叠加 $\xrightarrow{\text{极限}}$ 整体

350年的历史

- 微积分创立: Newton(英1665), Leibniz (德)
- 严格化 (Cauchy, Riemann, Weierstrass)
- Lebesgue积分理论(1902)
- 外微分理论在高维起关键作用(Grassman, Poincare, Cartan)

贯穿主线: 导数-微分-积分

你偷了我的微积分



牛顿

我独立发现的
早发表……

哈哈，我的笔记本
比你早十年……



莱布尼茨

弯曲空间	流形上微积分、纤维丛上微积分
无限维空间	Banach空间上微积分
非交换非结合	广义函数、Clifford分析

- 实分析的抽象积分理论是积分理论推广的最广场所.
- 微分几何的流形和纤维丛理论是导数推广的最广场所.

极限的精髓: 从规则到不规则, 从简单到复杂

极限过程打破人类的认识边界, 并将边界逐步推向无穷

实数理论	有理数	→	无理数
极限理论	常值数列	→	差不多常值
连续理论	常值函数	→	差不多常值函数
可导理论	线性函数	→	差不多线性函数
微分学	多项式	→	初等函数
积分学	阶梯函数	→	Riemann可积函数
实分析	简单函数	→	Lebesgue可积函数
泛函分析	光滑函数	→	广义函数

极限技巧: $\epsilon - \text{room}$ 给出信息如何用一列数精确表达

给定精度粗糙 $\rightarrow$ 精确化 = 舍 $\rightarrow$ 得 = 退一步 $\rightarrow$ 海阔天空

	粗糙	精确	
给定 ϵ	$ A - B < \epsilon$	$A = B$	$\epsilon \rightarrow 0^+$
给定 ϵ	$ f(x) - f(x_0) < \epsilon$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$	$\epsilon \rightarrow 0^+$
给定 h	$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$	$f'(x_0)$	$h \rightarrow 0$
给定 π	$\sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \Delta x_i$	$\int_a^b f(x) dx$	$\ \pi\ \rightarrow 0$

没有极限精确定义, 只能从哲学的角度定性研究, 不能定量研究.

脉络: 以哲学为导引

主要矛盾: 微分 : 积分

次要矛盾: 局部 : 整体 (Riemann面、代数几何)

离散 : 连续 (量子理论)

平坦 : 弯曲 (时空是Minkowski流形)

有限 : 无限 (矩阵到算子)

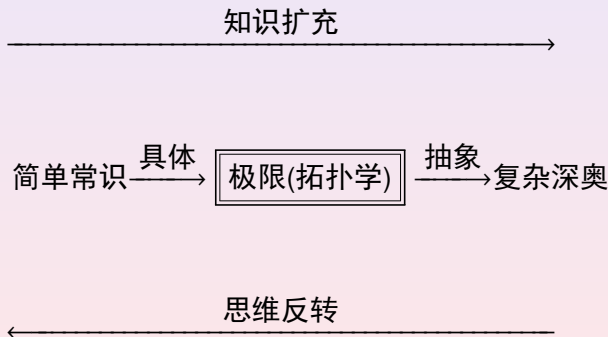
交换 : 非交换 (函数到算子)

直观 : 抽象

数 : 形

数学分析观光地图：极限

- 分析是极限的艺术（真传一句话）



数学分析观光地图：仿生学

- 仿生学

$$\text{有理数} \xrightarrow{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = \frac{p}{q}} \text{实数}$$

$$\text{多项式} \xrightarrow{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = f(x)} \text{初等函数}$$

数学分析观光地图：微分学精髓

- 微积学 $\equiv$ 狭义积分学:

$$C[a, b] \xrightleftharpoons[\frac{d}{dx}]{\int_a^x} C^1[a, b]/\mathbb{R}$$

- ## ● 不定积分和定积分关系

$$\int f(x)dx \quad \frac{\text{不定积分}}{\text{定积分}} \int_a^x f(t)dt + C$$

- ### ● 导数-微分-积分公式的对应

导数公式	微分公式	积分公式
$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$	$dF(x) = f(x)dx$	$F(x) + C = \int dF(x) = \int f(x)dx$

数学分析观光地图: 积分学精髓

$$R[a, b] \xrightarrow{\int_a^x} C[a, b] \quad (\text{非单射})$$

$$f \in R[a, b] \xLeftrightarrow{\text{Riemann可积性定理}} f \text{有界几乎处处连续}$$

- 任意修改函数在一点处的值, 则可积性不变, 积分值不变.

- Riemann积分理论 $\xrightarrow[\text{打破函数有界}]{\text{打破区间有界}}$ 广义Riemann积分理论

微分学顶峰: 带积分余项的Taylor公式

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \text{余项}$$

$$\text{积分余项} \underline{\underline{f^{(n+1)} \text{存在且可积}}} \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

有了导数和积分以后, 研究函数的手段极大地增加

带积分余项的Taylor公式一统江山

- 带Lagrange余项的Taylor公式
- 带Cauchy余项的Taylor公式
- 微积分基本定理
- 分部积分公式
- 积分中值定理(第一、第二)
- 微分中值定理(Rolle, Lagrange, Cauchy)
- L'Hospital法则

带Peano余项的Taylor公式

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \text{余项}$$

$$\text{Peano余项} \stackrel{f^{(n)}(a) \exists}{n \geq 1} o((x-a)^n)$$

带Peano余项的Taylor公式($n=0$) $\iff f$ 在 a 点连续

带Peano余项的Taylor公式($n=1$) $\iff f$ 在 a 点可导

带Peano余项的Taylor公式($n=1$) $\xrightarrow{\text{极值必要条件}}$ Fermat定理

带Peano余项的Taylor公式($n=2$) $\xrightarrow{\text{极值充分条件}}$ 极小值.

带Peano余项的Taylor公式($n=1$) $\implies \frac{0}{0}$ 型L'Hospital法则.

带Lagrange余项的Taylor公式

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \text{余项}$$

$$\text{Lagrange余项} \stackrel{f \in C^n[a,b]}{\stackrel{f^{(n+1)}|_{(a,b)} \exists}{=}} \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

带Lagrange余项的Taylor公式($n=0$) $\iff$ Lagrange 中值定理

带Lagrange余项的Taylor公式($n=1$) $\stackrel{\text{单调必要条件}}{\implies}$ 单调性

带Lagrange余项的Taylor公式($n=2$) $\stackrel{\text{凸凹必要条件}}{\implies}$ 凸性

第一章: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R}$

§1. $\mathbb{R}$

- 公元前2百万年: 有理数. 公元前2千年: 极限
- 记号:

$$\mathbb{N} \xrightarrow{\text{减法}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{除法}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\text{极限}} \mathbb{R} \xrightarrow{x^2 = -1} \mathbb{C}, \mathbb{C}[x]$$

(有理数域, 实数域(完备), 复数域(代数闭域))

例题: $\sqrt{n} \notin \mathbb{N} \xLeftrightarrow[n \in \mathbb{N}]{} \sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$

反证法: $\sqrt{n} = \frac{p}{q} \in (m, m+1), \quad p, q \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$

$$\implies q_1 := p - qm \in (0, q) \cap \mathbb{N}, \quad q_1 < q$$

$$\implies \sqrt{n} = \frac{p}{q} = \frac{p - qm}{q} = \frac{q_1}{q} = \frac{p_1}{q_1}$$

$$p = \frac{p_1}{q_1} q > p_1, \quad \mathbb{N} \ni p_1 = qn - pm = \sqrt{n} q_1.$$

$$\sqrt{n} = \frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1} \implies \text{矛盾(无穷递降法).}$$

$q > q_1, p > p_1, \text{all in } \mathbb{N}$

例题: $\sqrt{n} \notin \mathbb{N} \xLeftrightarrow[n \in \mathbb{N}] \sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$

反证法: $\sqrt{n} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

$$n = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \implies n = \left(\frac{2^{a_1} 3^{a_2} 5^{a_3} \dots}{2^{b_1} 3^{b_2} 5^{b_3} \dots}\right)^2, \quad a_j, b_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$\implies a_1 \geq b_1$, 否则与 $n \in \mathbb{N}$ 矛盾. 类似地 $a_j \geq b_j$

$\implies \sqrt{n} \in \mathbb{N}$

Q长除法

$$\begin{array}{r}
 q \) \quad \begin{array}{cc} a_0. & a_1 \end{array} \\
 \hline
 p \\
 \hline
 a_0 q \\
 \hline
 r_0 \times 10 \\
 \hline
 a_1 q \\
 \hline
 r_1 \times 10
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \xleftrightarrow{r_k=0,1,\dots,q-1} \\
 \xleftrightarrow{a_{k \geq 1}=0,1,\dots,9} \\
 a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad p, q \in \mathbb{N}
 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p = a_0 q + r_0 \\ 10r_0 = a_1 q + r_1 \\ \vdots \\ 10r_n = a_{n+1} q + r_{n+1} \\ \vdots \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c}
 \longleftrightarrow \\
 \frac{p}{q} = \left\{ \begin{array}{l} = a_0 + \frac{r_0}{q} \\ = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10} \frac{r_1}{q} \\ = a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n} \frac{r_n}{q} \\ \hline \text{上式极限} \\ r_n < q \end{array} \right. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = a_0.a_1a_2\cdots (\text{十进制})
 \end{array}$$

有理数

$$\text{有理数} \left\{ \begin{array}{ll} \text{有限小数 :} & \exists r_n = 0 \\ \text{无限小数, 但是循环 :} & \forall r_k \neq 0 \xrightarrow[r_k=0,1,\dots,q-1]{\text{方程组必重复}} \text{出现循环} \end{array} \right.$$

$$0.\dot{9} = 1 \quad (\text{否则, 距离} > 0)$$

$$x = 0.\dot{a}_1 \cdots \dot{a}_n \implies 10^n x = a_1 \cdots a_n + x$$

$$\implies x = \frac{a_1 \cdots a_n}{10^n - 1}.$$

- 十进制表示: $a_0.a_1a_2\cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$

$\mathbb{R}$ = 由1经过加、减、乘、除、极限运算得到

- Dedekind分割: $\sqrt{2} \equiv \{A, B\}, \quad \mathbb{Q} = A \sqcup B$

$$A := \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0; \text{ 或 } x > 0 \text{ 而且 } x^2 < 2\}$$

$$B := \{x \in \mathbb{Q} : x > 0, \quad x^2 > 2\}$$

- Cauchy 数列: $\sqrt{2} \equiv \{a_n\}_{n=1}^{\infty} / \sim$

$$a_n \in \mathbb{Q}, \quad \text{Cauchy数列(极限为 } \sqrt{2}\text{)}$$

有理数的稠密性

- 不同两个实数之间必有(无穷个)有理数和(无穷个)无理数.

$$\forall (x, y) \xrightarrow[\substack{\exists q = [\frac{1}{y-x}] + 1 \in \mathbb{N} \\ q(y-x) > 1}]{\quad} \exists p \in (qx, qy) \cap \mathbb{Z} \implies \frac{p}{q} \in (x, y)$$

$$\forall (x, y), \exists \frac{p}{q} \in \left(\frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}}\right) \implies \frac{p}{q} \sqrt{2} \in (x, y) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$$

实数几何表示

$\mathbb{R}$ $\xleftrightarrow{\text{双射}}$ 实数轴

$$\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \right\} \xrightarrow[\text{套出实轴上唯一点}]{\text{区间套}} \bigcap_{k=0}^{\infty} \left[a_0.a_1 \cdots a_k, \quad a_0.a_1 \cdots a_k + \frac{1}{10^k} \right].$$

总结：第三只眼睛看世界

- 进入《数学分析》大森林
- 战略高度的俯瞰
- 熟能生巧, 掌握数学全部已有知识

数学分析是数学各学科的固有参照物，是我们的锚定和定海神针； 其它学科都有数学分析的影子.

第一次作业: [1.1] 4, 5, 10

问题: 1, 3, 5, 6

分析是极限的艺术

数学分析(A1), 第2次课

任广斌(中国科大)

2023-9-13

本次课主要内容

- 数列极限(§2).
 - 极限定义: $\epsilon - N$ 语言.
- 极限性质(§3).
- 极限判别法.

极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 定量刻画的核心思想

- 类似绘画、建筑，由粗糙到精致的过程
 $\implies$ 需要 ϵ 出场, 传递出粗糙的一批数的信息。
- 数列通过趋势传递出一个数的信息，因此数列前有限项可任意取舍
 $\implies$ 需要 N 出场，去除前有限项，剩余的项传递出粗糙的一批数的信息。
- 数列是如何传递出唯一一个数的信息的？这是因为 ϵ 是任意的：

$$\bigcap_{\epsilon > 0} (a - \epsilon, a + \epsilon) \xrightarrow[\text{聚焦过程}]{a_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon) \ (\forall n > N(\epsilon))} \{a\}.$$

从仿生学看极限:

实数作为十进制小数是级数，是有理数极限

极限 $\xleftrightarrow{\text{双射}}$ 级数

- 级数是一个极限:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \xlongequal{a_n = \sum_{k=0}^n b_k} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

- 极限是一个级数(裂项求和):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \xlongequal[b_n = a_n - a_{n-1}]{a_0 = 0} \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

数学分析的研究对象是函数，数列也是函数

- 数列可以视为函数:

$$\underbrace{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots}_{\text{有序一列数}} \xleftrightarrow{\text{双射}} \begin{array}{l} f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto a_n \end{array}$$

- 数列记为 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. 下标 n 是哑标.

极限的定量刻画, 通过逻辑深入直观思维的盲区

$$\begin{array}{ccc} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a & \begin{array}{c} \xleftrightarrow{\text{极限顾名思义}} \\ \xleftrightarrow{\text{极限表示一种趋势}} \end{array} & a_n \text{ 无限接近 } a \quad (n \text{ 充分大时}) \\ & \xleftrightarrow{\hspace{1cm}} & a_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty) \end{array}$$

- 定性描述, 不深刻, 阻碍极限理论的进一步发展.

例如无法证明Cesàro平均的收敛性.

- 定量描述超越直觉.

如何定量刻画极限？

- 极限的本质：

利用数列 传递唯一一个数的信息 $\Rightarrow$ 数

- 策略： 利用仿生学

平均速度 逼近 $\Rightarrow$ 瞬时速度

逼近论出场

从逻辑的观点看 ϵ 技巧的起源

问题	在极限中, 如何由 a_n 确定唯一的数 a ?
难度	a_n, a 之间没有确定的关系.
解答	只能借助 $\epsilon - room$, a_n, a 之间关系可用不等式刻画.

仿生学：瞬时速度=平均速度(取定 ϵ)的极限(ϵ 任意)

- 给定 ϵ :

- 数列前有限项对于传递的信息没有任何帮助, 可以删去。
- N 出场:

删去滥竽充数项 $\xrightarrow[\text{需要删去多少项}]{N\text{出场刻画}}$ 剩余项给定精度下相同.

- 删减后, 数列成为 ϵ 误差下的常值数列, 传递出的信息可以是 $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ 的任意一个数。

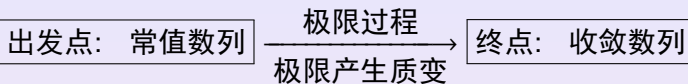
- 任意给定 ϵ :

传递的信息唯一: $\bigcap_{\epsilon > 0} (a - \epsilon, a + \epsilon) = \{a\}$

给定 ϵ	给定精度	粗糙	传递信息不唯一
任意给定 ϵ	任意给定精度	精致	传递信息唯一

$\forall$ $\equiv$ $\underset{\bullet}{A}ny,$ $\exists$ $\equiv$ $\underset{\bullet}{E}xist.$

收敛数列是常值数列的极限扩充



- 常值数列 $a_n \equiv a, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$
- 本质上是常值数列(有限项例外)

$$|a_n - a| < \epsilon \quad (n > N, N \text{ 与 } \epsilon \text{ 无关}) \xRightarrow{\text{非必要条件}} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

- 差不多常值数列

$$|a_n - a| < \epsilon \quad (n > N, N \text{ 与 } \epsilon \text{ 有关}) \xLeftrightarrow{\text{充要条件}} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

收敛=常值的推广

$$\text{常值数列} \xlongequal[\text{Trick: 不等式刻画等式}]{a_n \equiv a} \forall \epsilon > 0, \quad |a_n - a| < \epsilon$$

($\exists N$ **固定常值**, $n = N + 1, N + 2, \dots$)

$$\text{差不多常值数列} \xlongequal[\text{例 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{10^n} = 0]{\forall \epsilon > 0, \quad |a_n - a| < \epsilon}$$

($\exists N = \mathbf{N}(\epsilon)$, $n = N + 1, N + 2, \dots$)

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\epsilon\text{-}N \text{语言}}$

任意 ϵ 精度下, 去掉前面有限项为常值数列 (相差 ϵ 视为恒等.)

极限的精髓: ϵ 宽容度逼近技巧

	等式	不等式
常值数列	$a = b$	$\forall \epsilon > 0, a - b < \epsilon$
收敛数列	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$	$\forall \epsilon > 0, a_n - a < \epsilon \quad (n > N(\epsilon))$ $\forall \epsilon > 0$, 去掉有限项为 ϵ 精度下常值 极限是一种趋势, 增减有限项不影响极限

ϵ 技巧的哲学解读: 极限两部曲

ϵ 容忍度 = $\epsilon - room$ = 退一步海阔天空
= 先舍后得
= 先扬后抑
= 以退为进
= 将欲取之, 必先予之
= 欲擒故纵

取定 ϵ	故纵	先粗糙(逼近)
ϵ 任意	欲擒	再精致(极限)

- 逼近论的精髓:

粗糙 $\xrightarrow[\text{逼近}]{\epsilon\text{-出错容忍度}}$ 精致

- 借助 $\epsilon - room$ 是极限的精髓:

ϵ 出场 $\xrightarrow{\text{逼近}}$ 退一步海阔天空方法出场

(极限是一种趋势) N 尺子 $\leftarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \implies \epsilon$ 尺子(差不多常值)

- 极限定量刻画: 通过逼近, 确定数列传递出的信息。

$$\forall \epsilon > 0, \underbrace{\exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}, \text{ 当 } n > N \text{ 时,}}_{n \text{ 充分大时}} |a_n - a| < \epsilon.$$

两把尺子的作用

ϵ 尺子	确定数列是 ϵ 精度下的常值数列
N 尺子	去掉前面 N 项, 数列是 ϵ 精度下的常值数列 数列前面 N 项不反映数列的趋势性态, 可丢弃

- 如何用一个数列描述一个数?

数列 $\longrightarrow$ 数

先有 ϵ , 后有 N

先有 ϵ

确定数列是何精度下的常值数列

后有 N

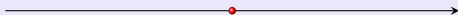
去掉前面多少项, 使得数列给定精度下的常值数列

ϵ 的任意给定

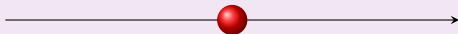
给定 ϵ	给定精度下的常值数列	粗糙值	不唯一
ϵ 可任意选取	相当于极限过程	精确值	唯一

极限的几何解读

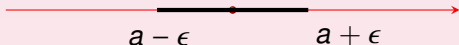
- 常值数列, 点,



- 收敛数列, 大点, 粗糙



- 精细 $(\forall n > N \implies a_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon),)$



做题法则： 战略战术原则

对常值数列命题成立 $\implies$ 对收敛数列命题成立

战略

战术

收敛数列是需要解读的某种意义下的常值数列：

ϵ 意义下的常值序列(ϵ 任意，有限项例外)

- 可替换

- $\forall \epsilon \in (0, 1)$

- $|a_n - a| < M\epsilon$ M 是固定正常数.

- $|a_n - a| \leq \epsilon.$

等价理由： 给定的数列传递出相同(唯一)信息

否定命题

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ 当 } n > N \text{ 时, 成立}$$

$$|a_n - a| < \epsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq a \iff \exists \epsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n_0 > N \text{ 成立}$$

$$|a_{n_0} - a| \geq \epsilon_0.$$

- 原理:

$$\forall \iff \exists, \text{ 否定不等式}$$

算术-几何平均不等式

对于非负数 $a_1, \dots, a_n$, 成立

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

等号成立 $\iff a_1 = \cdots = a_n$

例题: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

• 证法一:

$$1 \leq \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{1 \cdots 1 \sqrt{n} \sqrt{n}} \leq \frac{n-2+2\sqrt{n}}{n} < 1 + \frac{2\sqrt{n}}{n}$$

$$\implies 0 \leq \sqrt[n]{n} - 1 \leq \frac{2}{\sqrt{n}}$$

注意 $\frac{2}{\sqrt{n}} < \epsilon$ 等价于 $n > \frac{4}{\epsilon^2}$

$$\implies \forall \epsilon > 0, \text{ 取 } N = \lceil \frac{4}{\epsilon^2} \rceil, \text{ 当 } n > N \text{ 时, } |\sqrt[n]{n} - 1| < \epsilon$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

记号: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad [x] = \text{表示比 } x \text{ 小的最大的整数}$

例题: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

• 证法二:

$$\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n, \quad \alpha_n > 0$$

$$\implies n = (1 + \alpha_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} \alpha_n^2$$

$$\implies 0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n-1}} \quad \text{同上}$$

寻找 N 的原则

- N 不唯一, 找到一个就行

不需要找到最小的 N , 找最小的 N 是画蛇添足.

- 找 N , 通过“放缩”方法.
- $N = N(\epsilon)$ 表示依赖关系而不是函数.

§3 收敛数列性质

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \implies$ a_n 的性质是否遗传到极限
 a 的性质如何展示 a_n 性质

处理极限遵循的原则：战略战术原则

- 唯一性：收敛数列极限唯一

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b \implies a = b.$$

证明： $|a - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}, \quad n \gg 1$

记号： $n \gg 1 \iff n \text{充分大} \iff \exists N \in \mathbb{N}, \text{当 } n > N \text{时}$

收敛数列性质(续)

- 有界性: 收敛数列极限必有界, 反之不然
 - 有界: $|a_n| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (界不唯一).
 - 有上界: $a_n \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
 - 有下界: $a_n \geq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

证明: 取 $M = |a_1| + \cdots + |a_N| + |a| + 1$.

- 注记:

有界	宏观控制
收敛	集中趋势(大点)

极限与四则运算关系: 可交换、保四则运算

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \text{收敛} \implies \{a_n \circledast b_n\}_{n=1}^{\infty} \text{收敛}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \circledast b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \circledast \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

(记号: $\circledast = +, -, \times, \div$ 除时分母极限假设非零.)

$$\text{证明: } \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n||b|} < \frac{\epsilon}{\frac{|b|}{2}|b|}, \quad |b_n| > \frac{|b|}{2}, \quad n \gg 1.$$

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in (\alpha, \beta) \implies a_n \in (\alpha, \beta), \quad n \gg 1.$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \implies a_n < b_n, \quad n \gg 1.$$

$$(3) \quad a_n \leq b_n, \quad n \gg 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

$$(4) \quad a_n < b_n, \quad n \gg 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

注记： 极限刻画趋势, 反映不出前有限项的信息.

发散性判别法: 子列

- 子列: $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

k_n = 子列元素在原数列位置

n = 子列元素在自身数列位置

- k_n 满足刻画性质:

$$k_n \uparrow, \quad k_n \geq n \quad (\text{缩编})$$

- 子结构是数学中天然的结构:

子集合, 子群, 子环, 子域, 子模, 子流形, 子空间. 子代数

它是探针, 可探测研究对象的整体结构.

数列与子列敛散关系

- 下列等价

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 任意子列收敛
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 任意子列收敛且极限相同

证明: (1) $\implies$ (3)

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n > N \implies |a_n - a| < \epsilon$$

$$\text{但是 } k_n \geq n > N \implies |a_{k_n} - a| < \epsilon$$

例题: $\{\sin n\}_{n=1}^{\infty}$ 发散

证明: 取

$$k_n \in \underbrace{\left(n\pi + \frac{\pi}{3}, n\pi + \frac{2\pi}{3}\right)}_{\text{长度 } \frac{\pi}{3} > 1}$$

$$\implies \sin k_n \begin{cases} \geq \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} & n \text{偶} \\ \leq -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} & n \text{奇} \end{cases}$$

两边夹定理(比较判别法)

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \quad n \gg 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a.$$

$$\text{证明: } \forall \epsilon > 0, n \gg 1 \implies a - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \epsilon.$$

第二次作业: [1.2] 1(奇数题) 4, 5, 6, 7

[1.3] 10, 11, 12

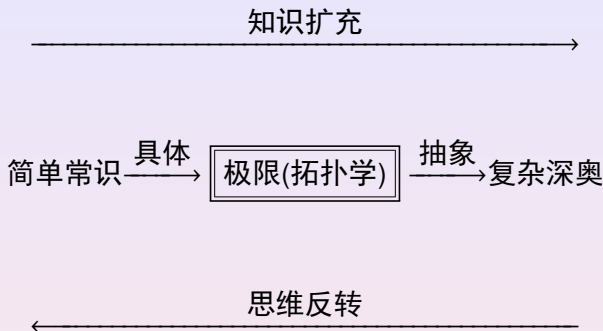
数学分析(A1), 第3次课

任广斌(中国科大)

2023-9-15

本次课主要内容

- 无穷大和无穷小
 - $\frac{\infty}{\infty}$ 型Stolz定理 (离散L'Hospital法则)
 - $\frac{0}{0}$ 型Stolz定理 (离散L'Hospital法则)
- 常数 e
 - e 是无理数

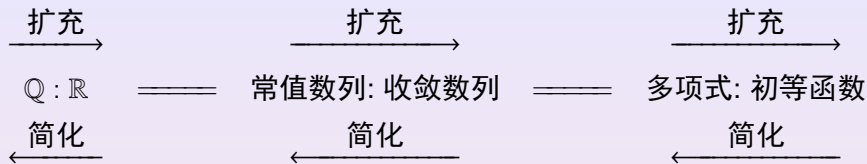


- 奥秘:

极限过程将我们的知识边界极大推广到遥远处

但是遥远边界处的知识是由极限的触角和核心知识发生联系.

极限奥秘(续)



$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是常值数列 $\xRightarrow{\text{战略战术方法}}$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 ϵ 误差下常值数列

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ $\implies$ a_n 的性质是否遗传到极限
 a 的性质如何展示 a_n 性质

§4 无穷大和无穷小

- 极限推广之一:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty, \infty\}.$$

极限推广后的优点:

任意实数列在扩充实数中, 存在收敛的子列。

- 推广方法:

$\sqrt{2}$ 用有理数列描述 $\overset{\text{类似}}{\longleftrightarrow}$ ∞ 用数列描述.

实轴单点紧化

- 球极投影

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{\text{双射}} & \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ A & \mapsto & B \end{array}$$

$\mathbb{S}^1$ 是以实轴的原点为圆心的单位圆周.

$\mathbb{S}^1$ 的北极与 A 点的连线交实轴于 B 点.

∞ 与 0 的地位等价。从复分析的观点 ∞ 更可爱(亚纯函数).

无穷大无穷小的定义

- 无穷大:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \iff \forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ 当 } n > N \text{ 时, } a_n > M.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$$

- 无穷小: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

- 无穷大和无穷小关系

$$\{a_n\} \text{ 无穷大} \iff \left\{ \frac{1}{a_n} \right\} \text{ 无穷小}$$

无穷大和无界关系

- 无穷大和无界:

无穷大 $\implies$ 无界 $\iff \exists$ 子列无穷大

敛散形态

	$a \in \mathbb{R}$	$\pm\infty$	∞
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$	收敛	发散	发散
		特性同 $\mathbb{R}$	特性不同于 $\mathbb{R}$
	$a = 0$ 无穷小量		无穷大量

无穷小的优势

- 收敛的本质是无穷小:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0$$

- 无穷小的优势:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \begin{array}{c} \text{天上掉下的非负工具} \\ \longleftrightarrow \\ \text{转化为非负无穷小} \end{array} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$$

$$\begin{array}{c} \text{简化一半} \\ \longleftrightarrow \\ \text{转化为上极限} \end{array} \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$$

推广的收敛: Cesàro平均

- Cesàro平均:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = a.$$

- 对于 $a = \infty$, 结论不成立:

$$a_n = \begin{cases} n, & n \text{偶} \\ -n-1, & n \text{奇}. \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = a.$$

证明: 简化: 不妨设 $a = 0$.

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n > N_1$$

$$\implies |a_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\implies \left| \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right| \leq \frac{|a_1| + \cdots + |a_{N_1}|}{n} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

对于 $n > N := N_1 + \left\lceil \frac{2(|a_1| + \cdots + |a_{N_1}|)}{\epsilon} \right\rceil + 1$ 成立.

Toeplitz变换

- 假定 t_{nk} 非负满足:

$$\sum_{k=1}^n t_{nk} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_{nk} = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

- 对应关系 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \mapsto \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ 称为Toeplitz变换:

$$b_n := \sum_{k=1}^n t_{nk} a_k.$$

- Toeplitz变换保持收敛性, 保持极限值不变.

Toeplitz变换例子

- 假设 $\alpha_n > 0$, 而且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_k}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

- Toeplitz变换

$$t_{nk} = \frac{\alpha_k}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}.$$

- 例子:

$$t_{nk} = \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n - 1}.$$

$$t_{nk} = \frac{k^2}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2} = \frac{k^2}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}.$$

Toeplitz定理: Toeplitz变换保极限

Theorem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n t_{nk} a_k = a$$

Toeplitz变换两个条件: 对于固定的 n , $\{t_{nk}\}_{k=1}^n$ 构成加权

$$t_{nk} \geq 0, \quad \sum_{k=1}^n t_{nk} = 1;$$

对于固定的 k , t_{nk} 是无穷小量.

Toeplitz定理证明

证明: 不妨设 $a = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \implies \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \text{当 } n > N \text{ 时}, \quad |a_n| < \epsilon/2$$

$$\begin{aligned} \implies \left| \sum_{k=1}^n t_{nk} a_k \right| &\leq \sum_{k=1}^N t_{nk} |a_k| + \frac{\epsilon}{2} \quad (\forall n > N) \\ &\leq \epsilon \quad (\forall n \gg 1) \end{aligned}$$

最后一步利用了下列事实:

$$\text{固定 } N, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N t_{nk} |a_k| = 0$$

Toeplitz变换的矩阵表达

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ \vdots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t_{11} & & & & \\ t_{21} & t_{22} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ \vdots \end{pmatrix}$$

- Toeplitz矩阵是非负下三角矩阵,

每行是单位分解, 每列是无穷小量.

- 当Toeplitz矩阵每行的元素都相等时,

Toeplitz 变换 $\longleftarrow$ Cesàro 平均.

$\frac{\infty}{\infty}$ 型Stolz定理(离散L'Hospital法则)

Theorem (Stolz定理)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{x_n \nearrow +\infty}{\text{右端} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}.$$

条件的自然性:

(1) $\frac{\infty}{\infty}$ 型 $\implies$ 分母极限为 $+\infty$.

(2) 右端出现的分母非零 $\implies x_n$ 严格单调.

(3) 利用右端计算左端 $\frac{\infty}{\infty}$ 型 $\implies$ 右端极限有意义.

$\frac{\infty}{\infty}$ 型Stolz定理(离散L'Hospital法则)

证明: 情形1 $a \in \mathbb{R}$ (右端记为 a). 记 $x_0 = y_0 = 0$.

$$\frac{y_n}{x_n} = \sum_{k=1}^n \frac{x_k - x_{k-1}}{x_n} \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} = \sum_{k=1}^n t_{nk} \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}.$$

Toeplitz $\implies$ Stolz

证明(续)

证明: 情形2 $a = +\infty$: 化为 $a = 0$ 情形, 只要证 $y_n \nearrow +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = +\infty \implies \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} > 1 \quad (n > N)$$

$$\implies y_n - y_{n-1} > x_n - x_{n-1}, \quad y_n \nearrow$$

$$\xrightarrow[n:=N+1, \dots, n]{\text{相加}} y_n - y_N > x_n - x_N \rightarrow +\infty.$$

情形3 $a = -\infty$: 化为 $a = +\infty$ 情形.

- $\frac{\infty}{\infty}$ 型Stolz定理, 实际上 $\frac{\star}{\infty}$ 型

- $a = \infty$ 结论失效:

$$x_n = n, \quad y_n = \begin{cases} n^2, & n \text{ 偶} \\ 0, & n \text{ 奇} \end{cases}$$

- 几何: 点 $M_n(x_n, y_n)$ 在x轴投影 $\nearrow +\infty$

$$\overrightarrow{M_n M_{n-1}} \text{斜率} \rightarrow a \implies \overrightarrow{OM_n} \text{斜率} \rightarrow a$$

$\frac{0}{0}$ 型Stolz定理(离散L'Hospital法则)

Theorem (Stolz定理)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{x_n, y_n \rightarrow 0, \quad x_n \searrow 0}{\text{右端} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}.$$

证明: 不妨设 $a = 0$ (y_n 用 $y_n - ax_n$ 代). 其它情形同Toeplitz证明.

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = 0 & \xRightarrow{\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}} -\epsilon < \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} < \epsilon \quad (\forall n > N) \\
 & \xRightarrow[n:=n+1, \dots, n+p]{\text{相加}} -\epsilon < \frac{y_{n+p} - y_n}{x_{n+p} - x_n} < \epsilon \quad (n > N, \forall p \in \mathbb{N}) \\
 & \xRightarrow{p \rightarrow \infty} -\epsilon \leq \frac{y_n}{x_n} \leq \epsilon \quad (n > N)
 \end{aligned}$$

§ 5 最重要常数e

- 在复的观点下, 指数函数一统天下

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

- 利用exp, log运算, 乘除法和加减法地位相同.

(利用Fourier变换和逆变换, 求导积分和乘除法地位相同.)

- 导数运算下的不动点

$$(e^x)' = e^x$$

概率论	偏微分方程	李群
Gauss分布	热核	单参数子群

e的定义

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 2.71828 \dots$$

- 极限存在性： 利用单调有界数列必有极限(证明见下节)
- 两个极限相等：

Lemma

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{3\alpha_n}{2n}, \quad \alpha_n \in (0, 1)$$

需要 $(1-r_1) \cdots (1-r_n) \geq 1-r_1-\cdots-r_n, \quad \forall r_1, \cdots, r_n \in (0, 1) \quad (\star\star)$

e的定义的合理性

$$e_n := (1 + \frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k}$$

$$\stackrel{(\star)}{=} 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n})$$

$$(\star) \implies e_n < e_{n+1}$$

$$(\star) \implies e_n < 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} < 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} < 3$$

$$\begin{aligned} (\star) \stackrel{(\star\star)}{\implies} e_n &\geq 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} (1 - \frac{1+2+\cdots+(k-1)}{n}) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - \frac{1}{2n} \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-2)!} > \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - \frac{3}{2n} \end{aligned}$$

e的Taylor展开余项

Lemma

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!\theta_n}, \quad \theta_n \in (n, n+1).$$

证明:
$$e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

$$\frac{1}{(n+1)!} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right) = \frac{1}{n!n}$$

推论:
$$e - \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{k!} \in \left(\frac{1}{11!}, \frac{1}{10!10}\right) \subset (0, 10^{-7}) \implies e = 2.71828 \dots$$

e是无理数

- 反证法

$$e = \frac{m}{n} \in (2, 3), \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!\theta_n}, \quad \theta_n \in (n, n+1).$$

两边乘 $n!$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{\theta_n} \in \mathbb{N}$ 矛盾

第3次作业: [1.4] 3 4, 5

[1.6] 1, 2, 14, 15, 16

[1.11] 3, 4, 5

数学分析(A1), 第4次课

任广斌(中国科大)

2023-9-18

本次课主要内容

- $\mathbb{R}$ 完备性 (§7):
 - $\mathbb{R}$ 是完备的 $\iff$ 实数完备性的六个等价定理
 - 实数完备性 $\implies$ 在 $\mathbb{R}$ 上建立极限理论的地基是牢靠的。

实数刻画

- 十进制表示: $a_0.a_1a_2\cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$

$\mathbb{R}$ = 由1经过加、减、乘、除、极限运算得到

- Dedekind分割: $\sqrt{2} \equiv \{A, B\}, \quad \mathbb{Q} = A \sqcup B$

$$A := \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0, \text{ 或 } x > 0 \text{ 而且 } x^2 < 2\}$$

$$B := \{x \in \mathbb{Q} : x > 0, \quad x^2 > 2\}$$

- Cauchy 数列: $\sqrt{2} \equiv \{a_n\}_{n=1}^{\infty} / \sim$

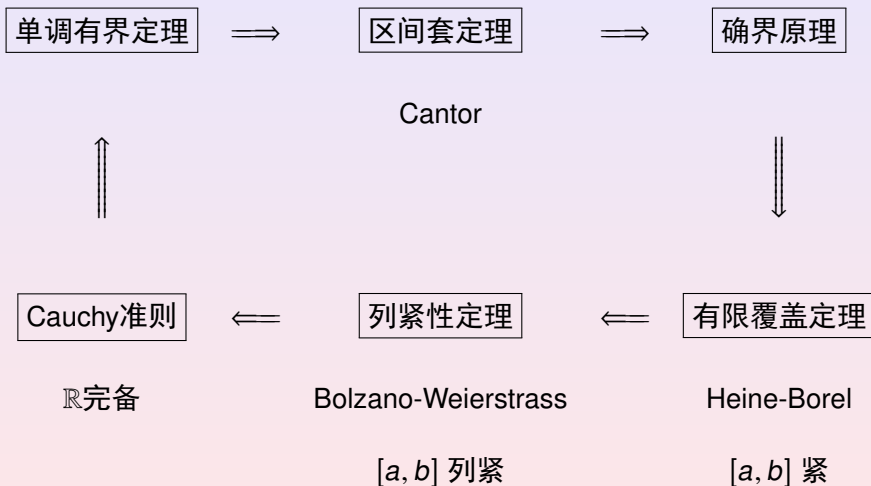
$$a_n \in \mathbb{Q}, \quad \text{Cauchy 数列(极限为 } \sqrt{2})$$

- Dedekind分割通过一对集合，传递出无理数的信息：

$$\sqrt{2} \longleftrightarrow A \sqcup B$$

- Cauchy 数列传递出无理数的信息：

$$\sqrt{2} \longleftrightarrow \text{Cauchy 数列}$$



Theorem (单调有界定理)

单调有界数列必有极限.

区间套定理

Theorem (区间套定理)

若闭区间套的长度趋于零, 则必套出唯一一点.

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$$

$$\implies \exists! \zeta \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$$

Theorem (确界原理)

有上界的集合必有上确界.

- $E \subset \mathbb{R}$, E 的上界:

$$x \leq M (\forall x \in E) \iff M \text{是} E \text{的一个上界.}$$

- E 的上确界记为 $\sup E$: 上界中最小的一个

- $\sup E$ 是 E 的上界: $\forall x \in E \implies x \leq \sup E$

- $\sup E - \epsilon$ 不是 E 的上界

$$\forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in E, \text{ s.t. } \sup E - \epsilon < x_\epsilon \leq \sup E$$

- 最大值与上确界

$\max E$	上界	$\max E \in E$
$\sup E$	上界	可能 $\sup E \notin E$ (例如 $E = (0, 1)$)

- 上确界在 ϵ 误差下最大值

- 起着最大值的作用

$$x_\epsilon \in (\sup E - \epsilon, \sup E] \cap E$$

x_ϵ 是 ϵ 误差下集合 E 的最大值

- 上确界是最大值在极限意义下的推广

上确界 $\xrightarrow{\text{极限}}$ 最大值

- 上确界与最大值关系

上确界 $\xrightarrow{\text{极限意义下}}$ 最大值

- 上确界与下确界是极限的另外的一个面目。

- 下确界

$\inf E :=$ 下界中最大的一个

$\sup E$	$\inf E$
supremum	infimum

- 对偶关系:

$$\sup(-E) = -\inf E$$

$$\inf(-E) = -\sup E$$

有限覆盖定理

Theorem (有限覆盖定理)

有界闭区间的任意开覆盖必存在有限子覆盖.
紧集

$$[a, b] \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda \quad (I_\lambda \text{ 开区间, } \Lambda \text{ 指标集合})$$

$$\underline{\underline{\exists \text{ 有限集 } \Lambda_0 \subset \Lambda}} \implies [a, b] \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda_0} I_\lambda$$

Theorem (Bolzano-Weierstrass列紧性定理)

有界数列必有收敛子列.

Cauchy判别准则

Theorem (Cauchy判别准则)

*Cauchy*数列必收敛.

Cauchy数列 $\iff$ 收敛数列.

Cauchy数列的定义

- Cauchy数列

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是Cauchy数列

$$\iff \forall \epsilon > 0, \underbrace{\exists N = N(\epsilon), \text{ 当 } n, m > N \text{ 时, 有 } |a_n - a_m| < \epsilon}_{n, m \text{ 充分大}}$$

Cauchy数列的特点

- Cauchy数列是天生具有收敛资质的数列

对于任意给定的误差, 去掉前面有限项, 是在给定精度下的常值数列.

- Cauchy数列的判定由数列自身的信息给定

Cauchy数列 $\xleftrightarrow{\text{没有外在的 } a}$ 自身的信息

- 内蕴判别法

$$\text{Cauchy} \implies \text{收敛}$$

- 完备的直观看法:

没有极限的Cauchy数列称为空隙, 无空隙称为完备.

定理证明(0): 实数十进制表示 $\implies$ 单调有界定理

$$a_1 \implies \alpha_0.\alpha_1\alpha_2\cdots, \quad \alpha_0 \in \mathbb{Z}, \quad \alpha_{j \geq 1} \in \{0, 1, \dots, 9\}$$

$$a_2 \implies \beta_0.\beta_1\beta_2\cdots \quad \text{类似}$$

$$a_3 \implies \gamma_0.\gamma_1\gamma_2\cdots$$

$$\vdots \qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$



$$a \implies P_0.P_1P_2P_3\cdots$$

- 考虑第一列:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \nearrow \implies \alpha_0 \leq \beta_0 \leq \gamma_0 \leq \cdots \leq M \quad (\text{第一列单调有界})$$

单调增加有上界的整数列, 只有有限项出现跳跃, 假设跳跃位于 $k_1, \dots, k_{n_0}$, 去掉前 k_{n_0} 项, 为常值数列.

- 考虑第二列, 继续类似讨论.

定理证明(1): 单调有界定理 $\implies$ 区间套定理

- 方法: 区间套 $\xrightarrow{\text{构造}}$ 单调有界数列.

$$a_n \nearrow \leq b_n \searrow, \quad b_n - a_n \rightarrow 0$$

单调有界定理

两个数列极限均存在且相等, 记为 ζ

$\xRightarrow{\exists!}$

$$\zeta \in \bigcap_{k=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

$$\forall x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} [a_n, b_n] \quad \text{有}$$

$$|\zeta - x| \leq b_n - a_n \rightarrow 0$$

定理证明(2): 区间套定理 $\implies$ 确界原理

- 方法: 有上界的集合 $\xrightarrow{\text{二等分}}$ 区间套.

记 E 是给定的有上界的集合, $F := E$ 的上界集.

$$\underbrace{\left[\underbrace{a}_{\in E}, \underbrace{b}_{\in F} \right]}_{\text{含有某 } E \text{ 中点 } d_0} \supset \underbrace{\left[a_1, \underbrace{b_1}_{\in F} \right]}_{\text{含有某 } E \text{ 中点 } d_1} \supset \underbrace{\left[a_2, \underbrace{b_2}_{\in F} \right]}_{\text{含有某 } E \text{ 中点 } d_2} \supset \dots$$

套出唯一一点 $\zeta = \sup E$:

$\zeta = E$ 中点的序列的极限 $= F$ 中点的序列的极限

- 区间套定理是数学的聚光灯：

特性从整体聚焦到一点附近，矛盾尖锐化。

定理证明(3): 确界原理 $\implies$ 有限覆盖定理

- 方法: 局部 $\xrightarrow[\text{得寸进尺方法}]{\text{Hömander 构造}}$ 整体.

$$\emptyset \neq \Gamma := \{x \in [a, b] : [a, x] \text{ 具有有限子覆盖}\} \subset [a, b]$$

$$c := \sup \Gamma, \quad c \in [a, b]$$

只要证明 $b \in \Gamma$.

反证法: 假设 $b \notin \Gamma$

取覆盖中开区间 I_0 , 取 $\epsilon_0 > 0$: $c \in (c - \epsilon_0, c + \epsilon_0) \subset I_0$

$$\xRightarrow{c = \sup \Gamma} \exists x_0 \in \Gamma \cap (c - \epsilon_0, c + \epsilon_0):$$

$[a, x_0]$ 具有有限子覆盖

$$\xRightarrow{\text{添加 } I_0} [a, c + \frac{\epsilon_0}{2}] \text{ 具有有限子覆盖}$$

$$\implies \text{若 } c + \frac{\epsilon_0}{2} \geq b, \text{ 则这与 } b \notin \Gamma \text{ 矛盾.}$$

$$\text{若 } c + \frac{\epsilon_0}{2} < b, \text{ 则这与 } c = \sup \Gamma \text{ 矛盾.}$$

定理证明(4): 有限覆盖定理 $\implies$ 列紧性定理

- 方法: 不存在收敛子列 $\xrightarrow[\text{构造}]{\text{反证法}}$ 开覆盖.

- 证明:

有界数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不存在收敛子列

不妨设 $\{a_n\}$ 互不相同
 $\implies \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a, b]$

$$\forall x \in [a, b], \exists (x - \delta_x, x + \delta_x)$$

仅含有 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有限项.

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \bigcup_{x \in [a, b]} (x - \delta_x, x + \delta_x)$$
$$\implies$$

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \bigcup_{\text{有限}} (x - \delta_x, x + \delta_x) \quad \text{矛盾}$$

定理证明(5): 列紧性定理 $\implies$ Cauchy准则

Cauchy数列 $\implies$ 有界数列

$\implies$ 存在收敛子列, 其极限是整个数列的极限.

定理证明(6): Cauchy准则 $\implies$ 单调收敛定理

假设 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots < M$ (数列的上界)

构造二等分区间套: $E := \{a_n\}_{n=1}^\infty$, $F := E$ 的上界集

$$\underbrace{\left[\underbrace{a_1}_{\in E}, \underbrace{M}_{\in F} \right]}_{\text{含有某 } E \text{ 中点 } a_{n_0}} \supset \underbrace{\left[u_1, \underbrace{v_1}_{\in F} \right]}_{\text{含有某 } E \text{ 中点 } a_{n_1}} \supset \underbrace{\left[u_2, \underbrace{v_2}_{\in F} \right]}_{\text{含有某 } E \text{ 中点 } a_{n_2}} \supset \cdots$$

$$\xrightarrow{\text{可选取 } n_k \nearrow} u_k \underbrace{\leq}_{\text{构造}} a_{n_k} \underbrace{\leq}_{\text{单调性}} a_{m(m > n_k)} \underbrace{\leq}_{\text{上界}} v_k$$

$$\xrightarrow{u_k, v_k \text{ 极限存在且相同}} \{a_n\} \text{ 收敛, 从而 Cauchy}$$

第4次作业: [1.5] 1, 2 4, 5, 6

[1.7] 3

[1.8] 1

数学分析(A1), 第5次课

任广斌(中国科大)

2023-9-20

本次课主要内容

- 数列收敛的判别法: 压缩映照原理 (单调收敛的补充)
- 数列单调的判别法: 导数为工具
- Newton切线法求根

Cauchy型压缩收敛

- Cauchy型压缩数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$q \in (0, 1)$ 是固定值

$$|a_n - a_{n-1}| \leq q|a_{n-1} - a_{n-2}| \quad \forall n > 2$$

Theorem

压缩数列必收敛

$$\text{证明: } |a_n - a_{n-1}| \leq q|a_{n-1} - a_{n-2}| \leq q^2|a_{n-2} - a_{n-3}| \leq q^{n-2}|a_2 - a_1|$$

$$\forall m > n, \quad |a_m - a_n| \leq |a_m - a_{m-1}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n|$$

$$\leq (q^{m-2} + \cdots + q^{n-1})|a_2 - a_1| \leq \sum_{k=n-1}^{\infty} q^k |a_2 - a_1|$$

$$\leq \frac{q^{n-1}}{1-q} |a_2 - a_1| \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

压缩数列导函数判别法

假设 $a_{n+1} = f(a_n)$, 且

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| = r < 1.$$

则 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是压缩数列.

$$\text{证明: } |a_{n+1} - a_n| \quad \quad \quad = \quad |f(a_n) - f(a_{n-1})|$$

$$\quad \quad \quad \underline{\underline{\text{中值定理}}} \quad |f'(\zeta)| |a_n - a_{n-1}|$$

$$\leq \quad r |a_n - a_{n-1}|$$

单调数列导函数判别法

假设 $a_{n+1} = f(a_n)$, $a_2 > a_1$,

$$f' \geq 0.$$

则 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是单调增加数列.

证明: $f' \geq 0. \implies f$ 单调增加

$$a_n \geq a_{n-1} \implies a_{n+1} = f(a_n) \geq f(a_{n-1}) = a_n.$$

利用函数研究数列

	数列	函数
	离散	连续
优势	可数情形	导数工具处理单调凸凹

例题

假设正数序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

证明: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛.

方法1:

$$a_n > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies 0 < a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n} < 1$$

$$\implies a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n} > \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \implies |a_{n+1} - a_n| &= \left| \frac{1}{1 + a_n} - \frac{1}{1 + a_{n-1}} \right| \\ &= \frac{|a_n - a_{n-1}|}{(1 + a_n)(1 + a_{n-1})} \\ &\leq \frac{4}{9} |a_n - a_{n-1}| \quad (\text{压缩数列}) \end{aligned}$$

例题续

方法2: $f(x) := \frac{1}{1+x}, \quad a_{n+1} = f(a_n)$

$$a_n > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies a_{n+1} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$\implies |a_{n+1} - a_n| = |f(a_n) - f(a_{n-1})|$$

$$\leq \max_{x \in [\frac{1}{2}, 1]} |f'(x)| |a_n - a_{n-1}| \quad (\text{Lagrange中值})$$

$$\leq \frac{4}{9} |a_n - a_{n-1}| \quad (\text{压缩数列})$$

极限值:

$$\begin{aligned} a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n} &\xRightarrow{A := \lim a_n} A = \frac{1}{1 + A} \\ &\implies A = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0.618\dots \end{aligned}$$

例题续: 单调性

- 数列: $a_{n+1} = f(a_n), \quad f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad a_1 = 1.$

- 奇数项子列 ↘: $a_{2n+3} = F(a_{2n+1}), \quad F(x) := f(f(x)) = \frac{1+x}{2+x}$

$$a_3 = F(a_1) = \frac{2}{3} < 1 = a_1$$

$$a_{2n+1} \leq a_{2n-1} \implies a_{2n+3} - a_{2n+1} = F'(\zeta)(a_{2n+1} - a_{2n-1}) < 0$$

- 偶数项子列 ↗: $a_{2n+2} = F(a_{2n}) \quad a_4 > a_2$

$$a_2 = f(a_1) = f(1) = \frac{1}{2}, \quad a_4 = F(a_2) = \frac{3}{5}$$

单调性判别方法

- 减法:

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} - x_n \begin{cases} \geq 0 \implies x_n \nearrow \\ \leq 0 \implies x_n \searrow \end{cases}$$

- 除法:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{x_{n+1}}{x_n} \begin{cases} \geq 1 \implies x_n \nearrow \\ \leq 1 \implies x_n \searrow \end{cases}$$

- 函数:

$$x_{n+1} = f(x_n), f'(x) > 0 \begin{cases} x_1 \leq x_2 \implies x_n \nearrow \\ x_1 \geq x_2 \implies x_n \searrow \end{cases}$$

注记: $\{x_n\}$ 可以沿着实轴增加或减少.

收敛型压缩收敛

- 收敛型压缩收敛 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

固定值: $a \in \mathbb{R}, \quad q \in (0, 1)$

$$|a_n - a| \leq q|a_{n-1} - a|, \quad \forall n > 2$$

收敛型压缩收敛

Theorem

压缩数列必收敛

证明: $|a_n - a| \leq q^{n-1}|a_1 - a| \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$

- 推广的压缩收敛(压缩收敛满足下列条件)

$$|a_{n+1} - a_n| \leq Mq^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\xRightarrow{\text{Cauchy准则}} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| \quad \text{收敛}$$

$$\xRightarrow{\text{Cauchy准则}} \{a_n\} \text{收敛}$$

Fibonacci数列

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2,$$

$$a_{n+1} \stackrel{\text{后一项是前两项之和}}{=} a_n + a_{n-1} \quad (\forall n \geq 2)$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Fibonacci数列(续)

$$\text{证明: } b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n} \implies b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{b_{n-1}}$$

取 b 满足

$$b = 1 + \frac{1}{b}, \quad \text{其中 } b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

两式相减

$$b_n - b = \frac{1}{b_{n-1}} - \frac{1}{b}$$

$$\implies |b_n - b| \leq q |b_{n-1} - b| \quad \text{其中 } q = \frac{1}{b} \in (0, 1) \text{ (压缩数列)}$$

Fibonacci数列(续)

$$\text{方法二: } b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n} \implies b_n = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{b_{n-1}}$$

$$b_{n+1} = 1 + \frac{1}{b_n} > 1 \implies b_{n+1} = 1 + \frac{1}{b_n} < 1 + \frac{1}{1} = 2$$

$$b_{n+1} = 1 + \frac{1}{b_n} > 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$b_n = f(b_{n-1}), \quad f(x) = 1 + \frac{1}{x}, \quad \forall x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$$

$$\begin{aligned} |b_{n+1} - b_n| &\leq \max_{x \in [\frac{3}{2}, 2]} |f'(x)| |b_n - b_{n-1}| \\ &\leq \frac{4}{9} |b_n - b_{n-1}| \text{ (压缩数列)} \end{aligned}$$

构造压缩数列计算平方根

- 计算 $\sqrt{a}$, $a > 0$:

- 初始粗糙值

$$x_0 = [\sqrt{a}] + 1$$

- 构造压缩数列:

$$\begin{aligned} x_n &:= \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}} \right) \geq \sqrt{a} \\ \implies 0 &\leq x_n - \sqrt{a} = \frac{1}{2} \left(x_{n-1} - 2\sqrt{a} + \frac{a}{x_{n-1}} \right) \leq \frac{1}{2} (x_{n-1} - \sqrt{a}) \end{aligned}$$

(压缩数列)

Stolz定理的应用

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_{n-1}) = 0 \xRightarrow[\text{Stolz}]{\text{Cesàro}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_{n-2}) = 0 \xRightarrow{\text{Stolz}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$

证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{2n} \xRightarrow{\text{Stolz}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n} - a_{2(n-1)}}{2n - 2(n-1)} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+1}}{2n+1} \xRightarrow{\text{Stolz}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+1} - a_{2(n-1)+1}}{2n+1 - (2(n-1)+1)} = 0$$

Stoltz定理的应用

$$0 < x_1 < 1, \quad x_{n+1} = x_n(1 - x_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\implies x_n = \frac{1}{n} - \frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$$

证明: 易见 $x_n \in (0, 1)$, $x_n \searrow \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

$$\xRightarrow{\text{Stoltz}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^{-1}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1}^{-1} - x_n^{-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (1 - x_n)}{x_n(1 - x_n)} = 1$$

Stolz定理的应用(续)

需要证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - \left(\frac{1}{n} - \frac{\ln n}{n^2}\right)}{\frac{\ln n}{n^2}} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(nx_n - 1)}{\ln n} \stackrel{nx_n \sim 1}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} nx_n \frac{n - x_n^{-1}}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - x_n^{-1}}{\ln n}$$

$$\stackrel{\text{Stolz}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x_{n+1}^{-1} + x_n^{-1}}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

$$\stackrel{=}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{1}{x_n(1 - x_n)} + \frac{1}{x_n}\right)$$

$$\stackrel{=}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{x_n(1 - x_n) - 1 + (1 - x_n)}{x_n(1 - x_n)} = -1$$

Stolz定理的应用

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_{n+1} + a_n) = s \in \mathbb{R} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{s}{3}$$

证明: 不妨设 $s = 0$ (否则考虑 $a_n - \frac{s}{3}$).

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n a_n & \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n a_n}{2^n} \\ & \xRightarrow{\text{Stolz}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^{n+1} a_{n+1} - (-2)^n a_n}{2^{n+1} - 2^n} = 0 \end{aligned}$$

$$\{r_n\}_{n=1}^{\infty} := [0, 1] \cap \mathbb{Q}.$$

考虑数列:

$$\implies \underbrace{r_1}_{1\text{项}}, \underbrace{r_1, r_2}_{2\text{项}}, \underbrace{r_1, r_2, r_3}_{3\text{项}}, \dots$$

该数列所有子列极限全体 = $[0, 1]$

Newton切线法求根

- 函数: $f \in C^2[a, b]$, $f' > 0$, $f'' > 0$, $f(a)f(b) < 0$.
- 函数在 (a, b) 具有唯一根 $x = c$:

$$c \in (a, b) \quad f(c) = 0$$

函数严格单调增加严格凸, 在区间端点函数值异号

- 下面给出方程 $f(x) = 0$ 的唯一根 $x = c$ 的数值解.

数值解的构造: Newton切线法求根方法

- 取 $x_1 = b$, 过 $(x_1, f(x_1))$ 的切线与实轴的交点记为 $(x_2, 0)$.

$(x_2, 0)$ 位于切线 $y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$.

- x_2 满足:
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

- $x_2 \in (a, b)$:

$$f(x_1) + f'(x_1)(a - x_1) < f(x_1) + f'(x_1)(c - x_1) \leq f(c) = 0$$

$$\Rightarrow x_2 := x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} > a \quad \text{同理} \quad x_2 < b.$$

- 过 $(x_n, f(x_n))$ 的切线与实轴的交点记为 $(x_{n+1}, 0)$:

$(x_{n+1}, 0)$ 位于切线 $y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$.

$$\implies x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- $x_n \in (a, b)$ (归纳法)

数值解的单调有界性

- $x_n > c$ ($n = 2, 3, \dots$):

$$\begin{aligned}x_{n+1} - c & \quad \quad \quad = x_n - c - \frac{f(x_n) - f(c)}{f'(x_n)} \\& \quad \quad \quad = (x_n - c) \left(1 - \frac{f'(\zeta_n)}{f'(x_n)}\right) \\& \quad \quad \quad = (x_n - c)(x_n - \zeta_n) \frac{f''(\eta_n)}{f'(x_n)} > 0.\end{aligned}$$

- $x_n > x_{n+1}$ ($n = 2, 3, \dots$):

$$\begin{aligned}0 < f'(x_n) & \quad \quad \quad = \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - x_{n+1}} \\& \quad \quad \quad = \frac{f'(\zeta_n)(x_n - c)}{x_n - x_{n+1}} \\& \quad \quad \quad \implies x_n > x_{n+1}\end{aligned}$$

- $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到 c :

$$d := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \xrightarrow{x_n \text{ 的递推公式两端取极限}} \quad f(d) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{方程根的唯一性(函数严格单调)}} \quad d = c$$

- 过 $(x_n, f(x_n))$ 的切线与实轴的交点记为 $(x_{n+1}, 0)$:

$(x_{n+1}, 0)$ 位于切线 $y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$.

$$\implies x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- 函数图形上的点列 $\{(x_n, f(x_n))\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限 $(c, f(c))$ 位于实轴上.
- 方程的根: $y = f(x)$ 具有根 $x = c$.
- 方程 $f(x) = 0$ 的数值解: $x_{n+1} \approx x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

数学分析(A1), 第6次课

任广斌(中国科大)

2023-9-22

本次课主要内容

- 上极限与下极限 (§8)

极限推广之三

- 上极限与下极限是处理极限的重要手段
- 上极限与下极限刻画数列的敛散程度.

数列集中于 $\left[\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \right]$ 的 ϵ 膨胀.

- 上极限与下极限在数列极限不明情况下使用

数列存在有极限的子列

- 数列有极限 $\iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
- 任意数列存在有极限的子列 (数列极限扩充后的好处)
- 数列极限与子列极限关系:

数列有极限 $\iff \forall$ 子列有极限

$\iff \forall$ 子列有极限且极限相同

极限点(聚点)

Definition

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限点 $x \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \iff \exists$ 子列 $a_{k_n} \rightarrow x$

上极限与下极限定义

Definition

$E := \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 极限点全体

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \sup E$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \inf E$$

上极限与下极限关系

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = - \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = - \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\overline{\lim} : \underline{\lim} = \sup : \inf = \max : \min .$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-a_n) \quad \quad \quad = \quad \quad \quad - \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

$$\sup(-E) \quad \quad \quad = \quad \quad \quad - \inf E$$

Theorem

上极限是最大极限点

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \max E, \quad E := \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ 极限点全体.}$$

上下极限可达到(续)

证明: 情形1: $\sup E = +\infty$

$$\implies \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup E = +\infty$$

$$\implies \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ 无上界 } \quad (\text{否则, 用反证法导出矛盾})$$

$$\implies \text{存在子列 } a_{k_n} \rightarrow +\infty$$

情形2: $\sup E = -\infty$

同情形1的证明

情形3: $\sup E \in \mathbb{R}$

$$\underline{\underline{a^* := \sup E \in \mathbb{R}}} \quad \exists c_1 \in E \cap (a^* - 1, a^* + 1)$$

$$\underline{\underline{\text{极限定义}}} \quad \text{存在数列 } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ 无穷多项 } \in (a^* - 1, a^* + 1)$$

$$\underline{\underline{\quad}} \quad \text{取 } a_{k_1} \in (a^* - 1, a^* + 1)$$

$$\text{同理存在 } c_2 \in E \cap (a^* - \frac{1}{2}, a^* + \frac{1}{2})$$

$$\underline{\underline{\quad}} \quad \text{取 } a_{k_2} \in (a^* - \frac{1}{2}, a^* + \frac{1}{2}), \quad k_2 > k_1.$$

继续这一过程, 存在子列 $\{a_{k_n}\}$, 极限为 a^* .

上极限的 $\epsilon - N$ 定义

Definition

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} a \in \mathbb{R} \text{ 是 } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ 极限点} \\ \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ 当 } n > N \text{ 时, 有 } a_n < a + \epsilon. \end{cases}$$

上极限的 $\epsilon - N$ 定义(续)

证明: 必要性: 第一条显然, 第二条利用反证法.

否则, 数列中有无穷多项大于 $a + \epsilon$,

$\implies$ 必有聚点大于 a , 与 a 是最大聚点矛盾.

充分性: 比 a 大的点都不是聚点.

上极限是一种极限

Theorem

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} a_k \searrow \right) =: \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{k \geq n} a_k \nearrow \right) =: \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$$

注记: $b_n = \sup_{k \geq n} a_k := \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$

$$\implies b_{n+1} = \sup\{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} \leq \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} = b_n$$

$$\implies \sup_{k \geq n} a_k \searrow$$

上极限是一种极限(续)

证明: 情形1: $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

存在子列 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = +\infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k \geq \lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = +\infty$

情形2: $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \implies \forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{当 } n > N \text{ 时, 有 } a_n < -M$

$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k \leq -M$

情形3: $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R}$

$$a^* := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \stackrel{\exists \text{子列} \{a_{k_n}\}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k.$$

$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, 有 $a_n < a^* + \epsilon$

$$\implies \sup_{k \geq n} a_k \leq a^* + \epsilon \quad (\forall n > N)$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k \leq a^* + \epsilon$$

$$\stackrel{\epsilon \rightarrow 0^+}{\implies} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k \leq a^*$$

上极限的极限刻画

- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n =$ 某子列 $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限. 该子列只知存在性, 不能具体写出.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \xlongequal{\exists \text{ 子列}} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n}$$

- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n =$ 某单调数列 $\{\sup_{k \geq n} a_k\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限, 该单调数列一般不是 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列, 但是具体给出.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \xlongequal{\exists \text{ 单调数列}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k$$

利用上下极限刻画极限

Theorem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

上下极限保序性

$$a_n \leq b_n \quad (n \gg 1) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$$

口诀：见到等式或不等式，取极限(上下极限).

保四则运算

在下列两端有意义的条件下成立

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$$

- 两端无意义: $+\infty + (-\infty)$, $-\infty + (+\infty)$

例如: $a_n = n$, $b_n = -n - 1$.

- 严格不等式可能成立:

例如: $\{a_n\} = \{0, 1, 2, 0, 1, 2, \dots\}$

$\{b_n\} = \{2, 3, 1, 2, 3, 1, \dots\}$

只证第一公式，另一公式类似、对偶.

- 左不等式, 将上下极限写为极限, 去掉极限, 只要证明

$$\inf_{k \geq n} a_k + \inf_{k \geq n} b_k \leq \inf_{k \geq n} (a_k + b_k)$$

$$\iff \inf_{k \geq n} a_k + \inf_{k \geq n} b_k \leq a_m + b_m \quad (\forall m \geq n)$$

证明(续)

- 右不等式情形一: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n \in \mathbb{R}$

将上下极限写为极限, 去掉极限, 只要证明

$$\inf_{k \geq n} (a_k + b_k) \leq \inf_{k \geq n} a_k + \sup_{k \geq n} b_k, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- 采用战略战术方法: 当 $\inf = \min, \sup = \max$ 时, 结论显然成立. 利用 ϵ -room 推广到一般情形:

$$\begin{aligned} & \forall n \in \mathbb{N}, \forall \epsilon > 0, \exists k_0 > n, \text{ s.t. } a_{k_0} < \inf_{k \geq n} a_k + \epsilon \\ \iff & \inf_{k \geq n} (a_k + b_k) \leq a_{k_0} + b_{k_0} \leq (\inf_{k \geq n} a_k + \epsilon) + \sup_{k \geq n} b_k \end{aligned}$$

证明(续)

- 右不等式情形二: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n \in \mathbb{R}$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = -\infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{k_n} + b_{k_n}) = -\infty$$

$\forall \epsilon > 0$, $\forall M \gg 1$, $\exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时

$$a_{k_n} + b_{k_n} < -2M + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_k + \epsilon < -M$$

- 右不等式情形三: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$

$$\forall M > 0, \quad a_{k_n} + b_{k_n} < -2M \quad (n \gg 1).$$

常用等式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \in \mathbb{R} \implies \left\{ \begin{array}{l} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + b \\ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + b \end{array} \right.$$

例题

$$a_{m+n} \leq a_m + a_n, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$$

$$\implies \left\{ \frac{a_n}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} \text{ 有极限, 有限或 } -\infty.$$

证明: 固定 $k \in \mathbb{N}$, 考虑 k 进制: $n = mk + l$, $0 \leq l \leq k-1$.

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{ma_k + a_l}{mk + l} = \frac{a_k}{k + \frac{l}{m}} + \frac{a_l}{n}$$

$$\xRightarrow{n \rightarrow \infty \Rightarrow m \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_k}{k} \xrightarrow{k \text{ 任意性}} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{k}$$

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{na_1}{n} = a_1 \quad (\text{有上界})$$

$$x = [x] + \{x\}, \quad [x] \in \mathbb{Z}, \quad \{x\} \in [0, 1)$$

例题

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \{(2 + \sqrt{3})^n\} = 1.$

证明: $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \{(2 - \sqrt{3})^n\} = 0$

$$\implies \underbrace{\underbrace{\{(2 + \sqrt{3})^n\}}_{\in (0,1)} + \underbrace{\{(2 - \sqrt{3})^n\}}_{\in (0,1)}}_{\in (0,2) \cap \mathbb{Z}} = 1$$

Cesàro平均与极限关系

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到A



它的所有子列的Cesàro平均都收敛到A

证明: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到 $A \implies \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 任意子列收敛到 A

$\implies$ 任意子列的Cesàro平均都收敛到 A

所有子列的Cesàro平均都收敛到 A

取上极限子列 $\implies$ Cesàro平均收敛到上极限, 也收敛到 A

取下极限子列 $\implies \overline{\lim} a_n = A = \underline{\lim} a_n$

乘法版本的Cesàro平均

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad a_n > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

在exp, log变换下

$$\Longrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = a.$$

例题

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ 1, & q = 1 \\ \text{发散}, & q = -1 \\ \infty, & |q| > 1. \end{cases}$$

证明: 不妨设 $q \neq 0$, $|q| < 1$. 令 $|q| = \frac{1}{1 + \alpha}$, $\alpha > 0$.

$$0 \leq |q|^n \leq \frac{1}{(1 + \alpha)^n} < \frac{1}{n\alpha} \rightarrow 0 \quad (\text{两边夹})$$

第6次作业: [1.6] 9, 10

[1.10] 1(奇数题), 2(3), 3

数学分析(A1), 第7次课

任广斌(中国科大)

2023-9-25

本次课主要内容

- 上极限与下极限应用
- 区间套的应用
- 重要概念的注记

压缩数列扰动

$$a_{n+1} \leq qa_n + \epsilon_n, \quad a_n, \epsilon_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$q \in (0, 1), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

压缩数列扰动(续)

证明: $a := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \in [0, +\infty]$

$$a_{n+1} \leq qa_n + \epsilon_n \xRightarrow{\text{取}\overline{\lim}} a \leq qa.$$

情形1 $a \neq +\infty$: $\implies a = 0.$

情形2 $a = +\infty$: 由归纳法 a_n 有界. 矛盾.

回顾Stolz定理的应用

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_{n+1} + a_n) = s \in \mathbb{R} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{s}{3}$$

证明: 不妨设 $s = 0$ (否则考虑 $a_n - \frac{s}{3}$).

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n a_n & \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n a_n}{2^n} \\ & \xrightarrow{\text{Stolz}} \frac{(-2)^{n+1} a_{n+1} - (-2)^n a_n}{2^{n+1} - 2^n} = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{2n} + 2a_n) = 0$$

$\{a_n\}$ 有界
 $\implies$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

上极限的应用(续)

证明: $a := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n| \in [0, +\infty)$

反证: $a \in (0, +\infty)$

$\implies$ 存在子列 $a_{k_n} \rightarrow a$ 或 $-a$

利用给定条件
 $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2k_n} = -2a$ 或 $2a$

$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} |a_{2k_n}| = 2a > a = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|$ 矛盾

严格区间套: e

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n, \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n+m_0} \right] \xlongequal[m_0 \in \mathbb{N}]{a \in (0, m_0]} \{e^a\}$$

特例

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \right] = \{e\}$$

调和-几何-算术平均不等式

$$\frac{1}{\frac{a_1^{-1} + \cdots + a_n^{-1}}{n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \quad a_j \geq 0$$

等式成立当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

(一句话证明: $\ln x$ 是 $\mathbb{R}^+$ 上的凹函数.)

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^{n+1} \iff \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n} < 1 + \frac{a}{n+1}$$

调和几何平均不等式中, 取

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1 + \frac{a}{n}, \quad a_{n+1} = 1.$$

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n+m_0} > \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^{n+1+m_0} \iff \sqrt[n+1+m_0]{\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n+m_0}} > 1 + \frac{a}{n+1}$$

调和几何平均不等式中, 取

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{n+m_0} = 1 + \frac{a}{n}, \quad a_{n+m_0+1} = 1.$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt[n+1+m_0]{\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n+m_0}} > \frac{n + m_0 + 1}{(n + m_0)^{\frac{1}{1+\frac{a}{n}}} + 1} \\
& = \frac{(n + m_0 + 1)(n + a)}{(n + m_0)n + (n + a)} \\
& = 1 + \frac{(n + m_0)a}{(n + m_0)n + (n + a)} \\
& = 1 + \frac{a}{n + \frac{n+a}{n+m_0}} \\
& \geq 1 + \frac{a}{n + 1} \quad a \in (0, m_0]
\end{aligned}$$

严格区间套: Euler常数 $\gamma = 0.577 \dots$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n+1), \quad 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right] = \{\gamma\}$$

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = 0.577 \dots$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \right] = \{e\}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \iff \frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

$$[a_n, b_n] := \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1), \quad 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right]$$

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0, \quad b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

调和级数(续)

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \iff \frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n} > \ln \frac{n+1}{n}$$

$$\implies 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1)$$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

$$a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N} \implies \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_{n+1} + 1}{a_n} - 1 \right) \geq 1.$$

裂项求和(续)

反证法: $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N$, 成立

$$n \left(\frac{a_{n+1} + 1}{a_n} - 1 \right) < 1$$

$$\iff a_n > n(a_{n+1} + 1 - a_n) \iff \frac{a_n}{n} - \frac{a_{n+1}}{n+1} > \frac{1}{n+1}$$

$$\implies +\infty > \frac{a_N}{N} > \frac{a_N}{N} - \frac{a_n}{n} = \left(\frac{a_N}{N} - \frac{a_{N+1}}{N+1} \right) + \cdots + \left(\frac{a_{n-1}}{n-1} - \frac{a_n}{n} \right)$$

$$> \frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{n+1} \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

假设 $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, 则

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

裂项相乘(续)

不妨设

$$\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \in (0, +\infty], \quad \beta := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \in [0, \infty).$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ 当 } n \geq N \text{ 时, 有 } \frac{a_{n+1}}{a_n} < \beta + \epsilon$$

$$\implies a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{N+1}}{a_N} a_N < (\beta + \epsilon)^n M \quad (M = (\beta + \epsilon)^{-N} a_N)$$

$$\implies \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \beta + \epsilon$$

裂项相乘(续)

情形1: $\alpha \in (0, \infty)$

$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n \leq N$ 时, 有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \alpha - \epsilon$

$$\implies a_n > M(\alpha - \epsilon)^n \quad (\forall n \geq N)$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \geq \alpha - \epsilon$$

裂项相乘(续)

情形2: $\alpha = +\infty$

$$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ 当 } n \geq N \text{ 时, 有 } \frac{a_{n+1}}{a_n} > M$$

$$\xRightarrow{\text{同理}} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \geq M \rightarrow +\infty$$

几何算术的转化

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{s^n} \stackrel{\forall s > 1}{=} 0$$

几何算术的转化(续)

必要性: $\forall s > 1 \iff qs > 1, \quad q := \frac{2}{1+s} \in (0, 1)$

$$\implies \sqrt[n]{|a_n|} < qs \quad (\forall n > N)$$

$$\implies \frac{|a_n|}{s^n} < q^n \rightarrow 0.$$

几何算术的转化(续)

充分性: $\frac{|a_n|}{s^n} < \epsilon \quad (\forall n > N) \iff \sqrt[n]{|a_n|} < \sqrt[n]{\epsilon} s$

$$\implies \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq s \rightarrow 1.$$

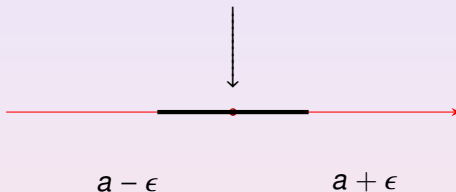
收敛数列的本质

收敛数列 $\Longleftrightarrow$ 常值数列 $+\lim$ (极限由 $\epsilon - N$ 表达)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall \epsilon > 0, \underbrace{\exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}, \text{ 当 } n > N \text{ 时,}}_{n \text{ 充分大时}} |a_n - a| < \epsilon.$$

收敛数列的图示

$$a_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon), \quad \forall \quad n > N(\epsilon)$$



ϵ 任意给定

- 区间套是数学中的聚光灯
 - 区间套将难点集中到一点附近处理.
 - 区间套将所有的信息归纳为一点附近.

最重要的两个拓扑概念：紧性

- 紧性：紧集几何表示为Big point.

在一点成立的性质 $\xrightarrow{\text{推广}}$ 在紧集成立.

紧集是有限集合在不可数集合中的最近的亲戚.

最重要的两个拓扑概念: 完备性

- 完备性: 极限理论建立的基石.

集合的框架应该足够大, 包含它的所有的Cauchy数列的天生的极限.

$$\mathbb{Q} : \mathbb{R} \longhookrightarrow R[a, b] : L^1[a, b]$$

问题

问题: 为何不使用 $\epsilon - N$ 语言, 也能求极限?

解答: $\epsilon - N$ 语言 $\implies$ 极限的判别法, 某些数列的收敛性
 $\implies$ 所考虑数列的收敛性

- 解题时可以利用所掌握的一切知识.

白猫、黑猫, 抓住老鼠就是好猫.

——邓小平

第7次作业: [1.10] $1(2)(4)$, $2(4)$. 问题1

[1.11] $1(2)(4)$, 问题1

数学分析(A1), 第8次课

任广斌(中国科大)

2023-9-27

本次课主要内容

- 集合的势：可列无穷和不可列无穷的巨大差别？
- 函数极限：本次课的最重要概念，如何定量刻画？

数列的三种看法

- 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$: 有序的可列个实数

$$a_1, \quad a_2, \quad \cdots, \quad a_n, \quad \cdots$$

- 定义在自然数集合上的实值函数:

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto a_n \end{aligned}$$

- 阶梯函数(常值延拓):

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f|_{[n,n+1)} &= a_n, \quad f|_{(-\infty,1)} = a_1 \end{aligned}$$

前两章联系：承上启下

第一章	数列	基础	可数	离散
第二章	函数	提升	不可数	连续

前三章联系

第一章	阶梯函数
第二章	连续函数
第三章	光滑函数

研究对象	函数：给出事物间的联系。 函数是吃进原材料吐出产品的机器
研究手段	极限的具体体现：求导和积分
研究方案	带有积分余项的Taylor展开光滑函数

- 集合 A 的势 $\equiv \bar{A}$

$\bar{A}$ A 为有限集合 A 中元素个数

Definition

$$\bar{A} = \bar{B} \iff \exists \text{双射 } f : A \rightarrow B.$$

$$\bar{A} \leq \bar{B} \iff \exists \text{单射 } f : A \rightarrow B.$$

$$A \sim B \quad \overset{\text{定义}}{\iff} \quad \bar{\bar{A}} = \bar{\bar{B}}$$

- $A \sim B$ 等价关系

(1) 自身性: $A \sim A$

(2) 反对称性: $A \sim B \implies B \sim A$

(3) 传递性: $A \sim B, B \sim C \implies A \sim C$

- 记号

A 的所有子集合全体 $= 2^A$

- 例子: $\mathbb{Z}_n = \{1, 2, \dots, n\}$

$$2^{\mathbb{Z}_n} = \left\{ \emptyset, \underbrace{\{1\}, \dots, \{n\}}_{n \text{ 个元素中取1个}}, \underbrace{\{1, 2\}, \dots, \{n-1, n\}}_{\text{取2个}}, \dots, \mathbb{Z}_n \right\}$$

- 记号来源

$$\overline{\overline{2^{\mathbb{Z}_n}}} = 2^n = 2^{\overline{\mathbb{Z}_n}}$$

可数集和不可数集

有限集	可数集	不可数集
$A \sim \mathbb{Z}_n$	$A \sim \mathbb{N}$	例如 $\mathbb{R}, 2^{\mathbb{R}}$

- 至多可数集=有限集或可数集
- 无穷集=不是有限集=可数集或不可数集.

- 最小无限集:

$$A \text{ 是无限集} \implies \overline{\overline{N}} \leq \overline{A}.$$

证明: 任意无限集合包含可列子集.

可数集的可数并必可数

$$\begin{aligned}\overline{\overline{A_n}} = \overline{\overline{N}} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) &\implies \overline{\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}} = \overline{\overline{N}} \\ \overline{\overline{A_n}} \leq \overline{\overline{N}} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) &\implies \overline{\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}} \leq \overline{\overline{N}}\end{aligned}$$

- 无穷集合和有限集合有本质差别:

$$A \text{ 是无穷集合} \implies \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A \setminus \{\text{独点集}\}}}$$

- 无穷集合涉及极限, 其性质产生质变.
- 极限是产生质变的重要手段. 极限是延拓之手、上帝之手.

可数集的可数并必可数续

证明:

$$\begin{array}{rcccc} A_1 : & x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots \\ A_2 : & x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots \\ A_3 : & x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

- 按斜对角线遍历每一个元素:

$$x_{11}, \quad \underbrace{x_{21}, x_{12}}_{\text{第二条斜对角线}}, \quad \underbrace{x_{31}, x_{22}, x_{13}}_{\text{第三条}}, \quad \cdots$$

- 行进中剔除重复元素 $\implies$ 至多可数.

$[0, 1]$ 区间不可数

不可数集续

证明: 反证法: $[0, 1] = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$

三等分区间套:

$$[0, 1] \supset \underbrace{I_1}_{\not\ni x_1} \supset \underbrace{I_2}_{\not\ni x_2} \supset \dots \supset \underbrace{I_n}_{\not\ni x_n} \supset \dots$$

$$\implies x_1, x_2, \dots \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x_0\} \subset [0, 1] \text{ 矛盾}$$

超越数和代数数

$\mathbb{R}$ 分类 $\left\{ \begin{array}{l} \text{超越数 (例如 } e, \pi) \\ \text{代数数 (整系数多项式的根)} \end{array} \right.$

$\mathbb{Q} \subset$ 代数数全体 (可数)

- 代数数=整系数多项式的根.
- 整系数多项式

$$a_0x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0, \quad a_i \in \mathbb{Z}, \quad a_0 \neq 0$$

- 方程的高:

$$n + |a_0| + \cdots + |a_n| \in \mathbb{N}$$

§2 函数的极限

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$	$\forall \epsilon > 0$	$\exists n \in \mathbb{N}$ 当 $n > N$ 时	有 $ a_n - a < \epsilon$
	任给误差	除去有限项 充分靠近 $+\infty$	a_n 差不多是 a ϵ 误差下的常值数列
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = s$	$\forall \epsilon > 0$	$\exists \delta > 0$ 当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时	有 $ f(x) - s < \epsilon$
	任给误差	除去远离 x_0 的项 除去 x_0 充分靠近 x_0 但 $\neq x_0$	$f(x)$ 差不多是 s ϵ 误差下的常值函数

- 万事开头难:

只要认识到必须利用 $\epsilon - \text{room}$, 极限的定义就顺理成章了.

- 谈论瞬时速度, 必须通过平均速度, ϵ 必须闪亮登场.
- 极限和 ϵ 是一回事.

极限表明趋势, 极限与远处值以及 x_0 处值无关.

任意修改 f 远离 x_0 的值以及 f 在 x_0 的值, 不影响极限.

函数极限传递出函数在 x_0 处的信息

函数极限体现函数在 x_0 附近的信息: ϵ 误差下的常值函数。

- 球极投影

$$S^1 \xleftrightarrow{\text{双射}} \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

实轴单点紧化

在单点紧化模型中

$+\infty$	x_0^+
∞	x_0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = s$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = s$

$$\text{Range } f|_{(x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}} \subset (s - \epsilon, s + \epsilon)$$

- ϵ 确定何时将区间视为独点集

$$(s - \epsilon, s + \epsilon) \equiv \{s\}.$$

- δ 确定在多大的区间上 f 视为常数(修改 f 在 x_0 处的值)

$$f|_{(x_0-\delta, x_0+\delta)} \equiv s.$$

函数极限的解读

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = s \iff$ 当 x 充分靠近 x_0 (不含 x_0) 时, $f(x)$ 充分靠近 s

$\iff$ $f(x)$ 在 x_0 附近(不含 x_0), 差不多是常值函数 s
 δ 尺子 ϵ 尺子

$\iff f|_{(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}} \doteq s$

$\iff f((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}) \subset (s - \epsilon, s + \epsilon)$

$\iff (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \subset f^{-1}(s - \epsilon, s + \epsilon)$

函数极限的映照观点

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \xrightarrow{f} (s - \epsilon, s + \epsilon)$$

$$x \rightarrow x_0$$

x_0 附近

$$f(x) \rightarrow s$$

f 是 ϵ 精度下常值

两把尺子的作用

(极限是一种趋势) δ 尺子 $\Leftarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \boxed{f(x) = s} \Rightarrow \epsilon$ 尺子 (差不多常值)

ϵ 尺子	确定极限存在的函数是 ϵ 精度下的常值函数
δ 尺子	去掉远离 x_0 的项以及 x_0 , 极限存在的函数是 ϵ 精度下的常值函数 远离 x_0 的项以及 x_0 不反映函数在 x_0 的逼近性态, 可以任意修改

ϵ 的任意给定

给定 ϵ	给定精度下的常值数列	粗糙值	不唯一
ϵ 可任意选取	相当于极限过程	精确值	唯一

- 依赖关系: $\delta = \delta(\epsilon, x_0)$
- 可替换
 - $\forall \epsilon \in (0, 1)$
 - $|f(x) - s| < M\epsilon$ (M 固定常数)
 - $|f(x) - s| \leq \epsilon$

例题

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

证明: $\forall \epsilon > 0$, 取 $\delta = \epsilon$, 当 $0 < |x - 0| < \delta$ 时, 有

$$|x \sin \frac{1}{x} - 0| \leq |x| < \delta = \epsilon.$$

寻找 δ 的原则

- δ 不唯一, 找到一个就行
- 不需要找到最大的 δ , 找最大的 δ 是画蛇添足.
- 找 δ , 通过“放缩”方法.
- $\delta = \delta(\epsilon, x_0)$ 表示依赖关系而不是函数.

否定命题

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq s \iff \exists \epsilon_0, \quad \forall \delta > 0, \quad \exists x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \\ |f(x) - s| \geq \epsilon_0.$$

• 原理:

$$\forall \iff \exists, \quad \text{否定不等式}$$

- Dirichlet 函数

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \chi_{\mathbb{Q}}$ 不存在.

第8次作业: [2.1] 3

[2.2] 4, 6

[2.3] 5, 6, 8, 问题 1

[2.4] 4

数学分析(A1), 第9次课

任广斌(中国科大)

2023-10-7

本次课主要内容

- 函数极限和数列极限关系定理
- 函数极限的性质
- 函数极限的Cauchy判别准则
- 上下左右极限

函数极限(与离散类似, 是离散提升)

常值函数	差不多常值函数
δ 与 ϵ 无关	δ 与 ϵ 相关

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \stackrel{f \text{ 是常数}}{=} s \iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta = 1, \text{ 当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时,}$$
$$|f(x) - s| < \epsilon.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = s \iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon, x_0), \text{ 当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时,}$$
$$|f(x) - s| < \epsilon.$$

函数极限解读

$$\begin{array}{c} \boxed{\lim_{x \rightarrow x_0}} \quad \boxed{f(x) = s} \\ \Updownarrow \\ \forall \epsilon > 0, \underbrace{\boxed{\exists \delta = \delta(\epsilon), \text{ 当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, } |f(x) - s| < \epsilon.}}_{x \rightarrow x_0} \end{array}$$

$x \rightarrow x_0 \iff x_0$ 附近(不包含 x_0), 远离 x_0 的点对于极限无贡献

$f(x) \rightarrow s \iff f$ 在 x_0 附近(不包含 x_0)差不多是常数

函数极限解读

$\lim$ 极限就是 ϵ
 ϵ 就是极限 ϵ

定性

定量

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = s$$

$$f|_{(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}} \xrightarrow{\epsilon \text{ 误差}} s$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \equiv \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}}$$

- 函数极限 $\equiv$ 传递信息, 函数极限 $\equiv$ 扩充知识
- 函数极限 $\equiv$ 局部是常值函数扰动

扰动：用 ϵ 刻画扰动幅度

局部：用 δ 刻画局部范围

函数极限与数列极限关系定理

Theorem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = s \quad \begin{array}{c} \xleftrightarrow{\{x_n\}: x_n \rightarrow x_0} \\ \xleftrightarrow{x_n \neq x_0, \forall n \in \mathbb{N}} \end{array} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = s$$

注记： 可设 x_n 单调

函数极限与数列极限关系定理(续)

必要性证明:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = s \implies \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, } |f(x) - s| < \epsilon$$

$$x_0 \neq x_n \rightarrow x_0 \implies \text{对上述 } \delta > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ 当 } n > N \text{ 时, } 0 < |x_n - x_0| < \delta$$

$$\implies |f(x_n) - s| < \epsilon \quad (\forall n > N)$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = s$$

函数极限与数列极限关系定理

充分性证明:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq s \implies \exists \epsilon_0 > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n : 0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n},$$

$$\text{但 } |f(x_n) - s| \geq \epsilon_0$$

$$\implies x_0 \neq x_n \rightarrow x_0, \exists \text{单调子列 } \{x_{k_n}\}, |f(x_{k_n}) - s| \geq \epsilon_0$$

$$\implies x_0 \neq x_{k_n} \rightarrow x_0 \text{ 但 } f(x_{k_n}) \not\rightarrow s$$

收敛数列必有单调的子列

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \quad \text{不妨设 } x_0 = 0$$

$\implies$ 不妨设 x_n 互不相同

$\implies$ 不妨设 $x_n > x_0$

取 $\searrow$
 $\implies x_{k_1} := x_1,$

$$x_{k_2} \in [0, \frac{x_{k_1}}{2}] \cap [0, \frac{1}{2}],$$

$$x_{k_3} \in [0, \frac{x_{k_2}}{2}] \cap [0, \frac{1}{2^2}],$$

...

例题

例题:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \chi_{\mathbb{Q}}(x) \quad \nexists.$$

函数极限与数列极限关系定理(续)

Theorem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \exists \text{实数} \quad \begin{array}{c} \xleftrightarrow{\{x_n\}: x_n \rightarrow x_0} \\ \xleftrightarrow{\forall x_n \neq x_0, \forall n} \end{array} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \exists \text{实数}$$

做题法则： 战略战术原则

对常值函数命题成立 $\implies$ 对极限存在的函数命题成立

战略

战术

- 离散版本提升到连续版本

离散是连续的垫脚石

- 常值函数提升到函数极限存在

常值函数是函数极限存在的垫脚石

唯一性

- 唯一性：收敛数列极限唯一

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = s_1, s_2 \implies s_1 = s_2$$

$$\text{左} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \xrightarrow{x_0 \neq x_n \rightarrow x_0} s_1, s_2 \implies \text{右}$$

收敛数列性质(续)

- 有界性:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = s \in \mathbb{R} \xrightarrow{\text{取 } \epsilon = 1} f \text{ 在某 } (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \text{ 有界.}$$

方法二: 否则, $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$.

$$f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\},$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \exists$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

保四则运算

$\circledast = +, -, \times, \div$
除时分母极限假设非零

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \exists$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \circledast g(x)) \exists$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \circledast g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \circledast \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

复合函数, 变量代换

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0, \quad \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = s$$

$y_0 \notin f((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\})$ 或者 g 连续 (外表帅)

$$\implies \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) \stackrel{y=f(x)}{=} \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = s.$$

复合函数, 变量代换(续)

证明 $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_0 \neq x_n \rightarrow x_0, \text{ 令 } y_n = f(x_n)$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0, \quad y_n \neq y_0$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = s.$$

极限 $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y)$ 与 $g(y_0)$ 没有任何联系。

称 y_0 是极限 $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = s$ 的空门:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} = \lim_{\substack{y \rightarrow y_0 \\ y \neq y_0}} .$$

$$f(x) \equiv y_0 \implies g(f(x)) = g(y_0)$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(y_0), \quad \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = s \text{ 两者无关}$$

例: $f \equiv 0$, $g = \chi_{\{0\}}$, $x_0 = y_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = 1, \quad \lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 0.$$

- 变量代换使用方法:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow x_0 \Rightarrow y \rightarrow y_0 \Rightarrow g(y) \rightarrow s}]{\text{变量代换 } y=f(x)} \lim_{y \rightarrow y_0} g(y)$$

- 注意条件: 右端极限存在, 而且下列条件之一成立:

- (1) $y_0 \notin f((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\})$;
- (2) g 连续 (连续性绑架了 g 在 y_0 处的极限值)

Theorem

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x), \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = s$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = s$$

Cauchy判别准则: 内蕴判别法

Theorem (Cauchy)

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \exists \iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x_1, x_2 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ 时,

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

注记: 这里 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \exists$ 是指该极限是实数。

Cauchy判别准则(续)

必要性: $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - s| + |f(x_2) - s|$

充分性: $\forall \{x_n\} : x_0 \neq x_n \rightarrow x_0$

$$\implies \{f(x_n)\} \text{Cauchy}$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \exists.$$

左右极限

右极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) := \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) =: f(x_0 + 0) = f(x_0^+)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = s \iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 当 } 0 < x - x_0 < \delta \text{ 时, } |f(x) - s| < \epsilon$$

左右极限与极限关系

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = s \iff \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = s$$

Definition

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) := \sup \left\{ s \in [-\infty, +\infty] : \exists x_0 \neq x_n \rightarrow x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = s \right\}$$

函数上极限与数列极限关系

Theorem

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = \max \left\{ s \in [-\infty, +\infty] : \exists x_0 \neq x_n \rightarrow x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = s \right\}$$

- $t := \sup E,$

$$E := \left\{ s \in [-\infty, +\infty] : \exists x_0 \neq x_n \rightarrow x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = s \right\}$$

- $t := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n, \quad s_n \in E.$

$$s_n = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k^{(n)}), \quad \exists x_0 \neq x_k^{(n)} \rightarrow x_0.$$

- 任意固定 $m \in \mathbb{N}$, 取 $k_0 \gg 1$, 取 $y_m = x_{k_0}^{(m)}$, 使得

$$0 < |y_m - x_0| < \frac{1}{m}, \quad |f(y_m) - s_m| < \frac{1}{m}$$

$$\implies x_0 \neq y_m \rightarrow x_0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} f(y_m) = t \implies t = \max E$$

函数上极限是一种极限

离散版本:
$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k$$

连续版本:
$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} f(x)$$

上下极限与极限关系

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = s \iff \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = \underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = s$$

例题

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\begin{aligned} x \in (0, \frac{\pi}{2}) & \xRightarrow{\text{面积}} \sin x < x < \tan x \\ & \xRightarrow{\quad} 0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \left(\frac{x}{2}\right)^2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

第9次作业: [2.4] 11, 12, 13

数学分析(A1), 第10次课

任广斌(中国科大)

2023-10-8

本次课主要内容

- 72种极限
- Stolz定理
- 无穷大和无穷小

极限的全部类型

- 共计72种极限: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = s.$

lim	lim,	$\overline{\lim}$	$\underline{\lim}$	3种			
s	$s \in \mathbb{R},$	$+\infty,$	$-\infty,$	∞	4种		
x_0	$x_0 \in \mathbb{R},$	$x_0^+,$	$x_0^-,$	$+\infty,$	$-\infty,$	∞	6种

- 72种极限举例

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = s \stackrel{s \in \mathbb{R}}{\iff} \forall \epsilon > 0, \exists M > 0, \text{ 当 } |x| > M \text{ 时, } |f(x) - s| < \epsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \stackrel{x_0 \in \mathbb{R}}{\iff} \forall M > 0, \exists \delta > 0, \text{ 当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, } |f(x)| > M$$

- 有限点和无穷点的统一(球极投影).

无穷远点 $\left\{ \begin{array}{ll} \text{利用函数及其趋势刻画} & \text{(连续版本)} \\ \text{利用数列及其趋势刻画.} & \text{(离散版本)} \end{array} \right.$

- 上下左右极限在极限的研究中将难度肢解, 可研究极限不存在情形.

连续函数 $\left\{ \begin{array}{ll} \begin{array}{c} \text{左、右极限} \\ \xrightarrow{\text{推广}} \end{array} & \text{左连续和右连续.} \\ \begin{array}{c} \text{上、下极限} \\ \xrightarrow{\text{推广}} \end{array} & \text{上半连续和下半连续.} \end{array} \right.$

极限统一定义

- 极限统一定义

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = s \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty, \infty\}$$

$$\iff \forall \text{ 邻域 } U_s, \exists \text{ 去心邻域 } \hat{U}_{x_0} :$$

$$\underbrace{f(\hat{U}_{x_0})}_{\text{局部}} \subset \underbrace{U_s}_{\text{常值扰动}}$$

局部常值扰动，扰动决定局部

不离于宗, 谓之天人.

——《庄子·天下》

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

重要极限(续)

证明: 情形1: $x > 0$. $n = [x]$ $x \in [n, n+1)$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\forall \epsilon > 0, x \gg 1 \implies \text{左, 右} \in (e-\epsilon, e+\epsilon) \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

情形2: $x < 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \stackrel{-x=y+1}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y+1} = e.$$

$\frac{\infty}{\infty}$ 型Stolz定理(离散L'Hospital法则)

Theorem (Stolz定理)

- $\frac{\infty}{\infty}$ 型: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \infty.$

- 右端 $\in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}.$

- 严格单调性(保证分母非零):

存在常数 $T > 0$, 使得 $g(x + T) > g(x)$ ($x \gg 1$).

- 连续性(保证局部有界): $f, g \in C(a, +\infty).$

$$\implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x + T) - f(x)}{g(x + T) - g(x)}.$$

$\frac{\infty}{\infty}$ 型Stolz定理(离散L'Hospital法则)

Theorem (Stolz定理)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \frac{f, g \text{ 局部有界, } g \nearrow +\infty}{\text{右端} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{g(x+1) - g(x)}.$$

Theorem (Cauchy定理)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

f 局部有界
右端存在

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)).$$

Theorem

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{n+1}} \quad \frac{\substack{f \text{ 局部有界, } n \in \mathbb{N} \\ \text{右端存在}}}{n+1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x^n}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^{n+1} - x^{n+1}}{x^n} = n+1$$

Theorem

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^{1/x} \quad \frac{\text{非负 } f \text{ 在 } (a, +\infty) \text{ 局部有界}}{\text{右端存在}} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(f(x))^{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln f(x)}{x} \quad \xrightarrow{\text{Stolz}} \ln \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}$$

离散版本:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad \xlongequal{\quad} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Stolz定理的证明

情形1: $A \in \mathbb{R}$

$\forall \epsilon > 0, \exists x_0 > a$, 当 $x \geq x_0$ 时, 有

$$A - \epsilon < \frac{f(x+T) - f(x)}{g(x+T) - g(x)} < A + \epsilon$$

$$\xRightarrow{T\text{进制}} \forall x > x_0 + T, \exists k = k(x) \in \mathbb{N} :$$

$$\frac{x - x_0}{T} \in [k, k + 1) \quad \text{即} \quad x - kT \in [x_0, x_0 + T) :$$

$$\implies x - T > x - 2T > \cdots > x - kT \geq x_0$$

$$A - \epsilon < \frac{f(x) - f(x - T)}{g(x) - g(x - T)}, \quad \dots, \quad \frac{f(x - (k - 1)T) - f(x - kT)}{g(x - (k - 1)T) - g(x - kT)} < A + \epsilon$$

Stolz定理的证明(续)

$$\xRightarrow{\text{合分比}} A - \epsilon < \frac{f(x) - f(x - kT)}{g(x) - g(x - kT)} < A + \epsilon$$

$$(A - \epsilon)\left(1 - \frac{g(x - kT)}{g(x)}\right) < \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x - kT)}{g(x)} < (A + \epsilon)\left(1 - \frac{g(x - kT)}{g(x)}\right)$$

$$\xRightarrow{\text{条件(1)(4)}} A - \epsilon \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \leq A + \epsilon$$

Stolz定理的证明(续)

情形2: $A = +\infty$, 归结于 $A = 0$ 情形.

情形3: $A = -\infty$, 归结于 $A = +\infty$ 情形.

$\frac{0}{0}$ 型Stolz定理(离散L'Hospital法则)

Theorem (Stolz定理)

- $\frac{0}{0}$ 型: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.
- 右端 $\in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
- 严格单调性(保证分母非零):

存在常数 $T > 0$, 使得 $g(x + T) < g(x)$ ($x \gg 1$).

$$\implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x + T) - f(x)}{g(x + T) - g(x)}.$$

Stolz定理的证明

只考虑右端极限 $s \in \mathbb{R}$. 不妨设 $s = 0$, 否则 f 用 $f - sg$ 代替.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+T) - f(x)}{g(x+T) - g(x)} = 0$$

$\implies \forall \epsilon > 0, \exists x_0 > a$, 当 $x \geq x_0$ 时, 有

$$-\epsilon < \frac{f(x+T) - f(x)}{g(x+T) - g(x)} < \epsilon$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x > x_0$$

$$\implies x + kT > x + (k-1)T > \cdots > x + T > x > x_0$$

$$-\epsilon < \frac{f(x+T) - f(x)}{g(x+T) - g(x)}, \quad \dots, \quad \frac{f(x+kT) - f(x+(k-1)T)}{g(x+kT) - g(x+(k-1)T)} < \epsilon$$

Stolz定理的证明(续)

$$\xRightarrow{\text{合分比}} -\epsilon < \frac{f(x + kT) - f(x)}{g(x + kT) - g(x)} < \epsilon$$

$$\xRightarrow{k \rightarrow \infty} -\epsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \epsilon$$

$$\xRightarrow{\quad} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

连续版本Stolz定理 $\implies$ 离散版本Stolz定理

§6 无穷大和无穷小(两者对偶, 本质相同)

- 无穷小量:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \iff f(x) \text{ 是 } x \rightarrow x_0 \text{ 时的无穷小量.}$$

- 无穷大量:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \iff f(x) \text{ 是 } x \rightarrow x_0 \text{ 时的无穷大量.}$$

- 无界量:

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty \iff \exists \{x_n\}: \quad x_0 \neq x_n \rightarrow x_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty.$$

常见无穷小量

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^\alpha} = s \neq 0 \stackrel{\alpha > 0}{\iff} f(x) \text{ 是 } x \rightarrow x_0 \text{ 时 } \alpha \text{ 阶无穷小量}$$

等价无穷小量和等价无穷大量

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = \infty \quad (0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad \varphi \sim \psi \quad (x \rightarrow x_0) \text{ 等价}$$

等价量在极限计算中的应用

$\varphi \sim \psi \quad (x \rightarrow x_0)$ 等价无穷大(小)量

$$\implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\psi(x)$$

在右端极限存在的条件下成立

等价量在极限计算中的应用(续)

证明: 左 = $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \psi(x) \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \text{右}$

在加减情形, 应用等价无穷大(小)量小心:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \stackrel{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)}{=} \frac{1}{3!}.$$

- Landau记号

$$f(x) = O(1) \quad (x \rightarrow x_0) \iff f(x) \text{在} x_0 \text{附近有界}$$

$$f(x) = o(1) \quad (x \rightarrow x_0) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \rightarrow x_0) \iff \frac{f(x)}{g(x)} = O(1), \quad (x \rightarrow x_0)$$

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \rightarrow x_0) \iff \frac{f(x)}{g(x)} = o(1), \quad (x \rightarrow x_0).$$

例子

$$0 < x_1 < 1, \quad x_{n+1} = x_n(1 - x_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\implies x_n = \frac{1}{n} - \frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n^2}}{\frac{\ln n}{n^2}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(nx_n - 1)}{\ln n} = -1$$

无穷大量的阶

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 \\ s \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1 \end{cases}$$

g 是比 f 更高阶的无穷大量

同阶

等价.

常见无穷大的阶

- $x \rightarrow +\infty$ 的无穷大量

$$\ln x \ll x^\alpha \ll a^x \ll e^{e^x} \ll \dots$$

无穷大量的阶 ↗, 其中 $\alpha > 0, a > 1$.

例题

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} \stackrel[y = \ln x]{b = e^\alpha} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{b^y} \stackrel{\text{Stolz}}{=} 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} \stackrel{\text{Stolz}}{=} 0$$

可令 $\alpha \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = \begin{cases} +\infty & \alpha > \beta \\ 1 & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha < \beta. \end{cases}$$

第10次作业: [2.5] 4, 6, 7, 8, 9, 10,

[2.6] 3

数学分析(A1), 第11次课

任广斌(中国科大)

2023-10-9

- 连续函数

连续是粘性的数学表达:

一个区间上连续函数有它在稠密集合上的值唯一确定.

- 直观:

自变量 x 连续变化 $\implies$ 因变量 y 也随之连续变化.

- 运动物体走过的距离, 随着时间的变化而连续变化.

当时间变化非常小, 它运动的距离变化很小 (不管速度多大).

一点处连续: 假设 f 在 x_0 附近有定义.

f 在 x_0 处连续: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

$$\Longleftrightarrow \text{保邻近} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\Longleftrightarrow \text{换次序} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right)$$

$$\Longleftrightarrow \text{离散判别} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0), \quad x_0 \neq x_n \rightarrow x_0$$

$$\Longleftrightarrow \text{左右连续} \quad f(x_0^-) = f(x_0) = f(x_0^+)$$

$$\Longleftrightarrow \text{上半下半连续} \quad f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0).$$

- 上半连续:

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0).$$

- 下半连续:

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0).$$

- 左连续:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \equiv f(x_0).$$

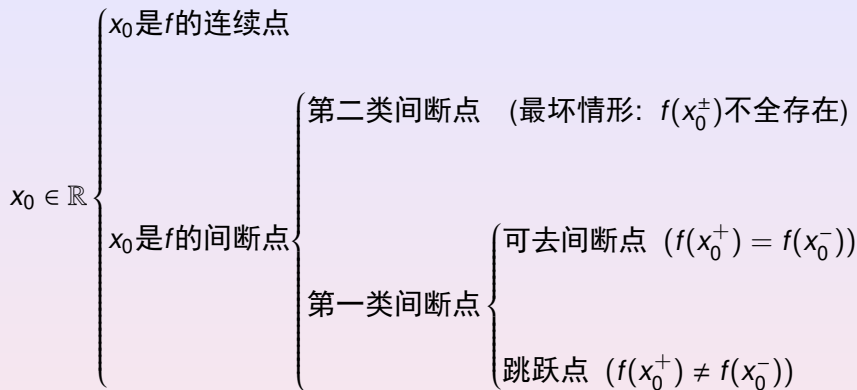
- 右连续:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \equiv f(x_0).$$

刻画突变现象

- 连续函数绑架了它在一点处的极限值
- 连续函数的极限值是天然给定的.

点的分类



- 第一类间断点: $f(x_0^\pm)$ 存在且有限. 跳跃度 = $|f(x_0^+) - f(x_0^-)|$

例题

$\chi_{\mathbb{Q}}(x)$	$x\chi_{\mathbb{Q}}(x)$	$\frac{\sin x}{x}$	$\sin \frac{1}{x}$	$x \sin \frac{1}{x}$
第二类	$x = 0$ 连续	$x = 0$ 可去间断	$x = 0$ 第二类	$x = 0$ 可去
	其它第二类	其它连续	其它连续	其它连续

$R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 周期为1.

$$\forall x \in (0, 1], \quad R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q}, \quad (p, q) = 1, \quad p, q \in \mathbb{N} \\ 0 & x = \text{无理数} \end{cases}$$

Riemann函数: 几乎处处连续, 几乎处处为零

$\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = 0,$ $R(x)$ 在无理点连续, 有理点可去间断(上半连续).

证明: $\forall x_0 \in (0, 1], \forall \epsilon > 0$:

$(x_0 - 1, x_0 + 1)$ 仅有有限个有理数 $\frac{p}{q}$, 使得 $\frac{1}{q} \geq \epsilon$

即 $q = 1, 2, \dots, [\frac{1}{\epsilon}]$.

(在 ϵ 精度下, 只有有限项非零)

Riemann函数在无理点的连续性, 诠释出连续是 ϵ 精度下的连绵不断.

- 连续是粘合剂:

连续 ϵ 精度下 连绵不断, 没有断开

- 连续的本质是局部常值, 是 ϵ 误差下的常值, 是修正意义下的连绵不断.

局部常值扰动, 扰动决定局部

一点连续 $\Rightarrow$ 局部连续

f 在 x_0 处连续 $\Rightarrow f$ 在 x_0 附近连续, f 在 x_0 附近一致连续

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0 \iff \lim_{r \rightarrow 0^+} \sup_{x_1, x_2 \in (x_0 - r, x_0 + r)} |f(x_1) - f(x_2)| = 0.$$

重要概念: 振幅

函数在一个区间上的振幅差不多是最大值和最小值之差, 是最大值和最小值之差的修正. 振幅=落差.

$$\omega_f(x_0, r) \quad \equiv \quad \sup_{x \in (x_0-r, x_0+r)} f(x) - \inf_{x \in (x_0-r, x_0+r)} f(x)$$

$$\stackrel{\star}{=} \sup_{x_1, x_2 \in (x_0-r, x_0+r)} |f(x_1) - f(x_2)|.$$

在区间上振幅(续)

★的证明: 左 $\geq \sup_{x_1, x_2 \in (x_0 - r, x_0 + r)} (f(x_1) - f(x_2)) =$ 右

$\forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon^{(1)}, x_\epsilon^{(2)} \in (x_0 - r, x_0 + r) \text{ s.t.}$

$$\text{左} \leq f(x_\epsilon^{(1)}) + \epsilon - (f(x_\epsilon^{(2)}) - \epsilon) \leq \text{右} + 2\epsilon$$

$$\omega_f(x_0) \Longlong \lim_{r \rightarrow 0^+} \omega_f(x_0, r).$$

$$f \text{ 在 } x_0 \text{ 处连续} \iff \omega_f(x_0) = 0.$$

连续的振幅刻画(续)

必要性:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

$$\implies \omega_f(x_0, r) \stackrel{\forall r \in (0, \delta)}{=} \sup_{x_1, x_2 \in (x_0 - r, x_0 + r)} |f(x_1) - f(x_2)| \leq 2\epsilon$$

连续的振幅刻画(续)

充分性:

$$0 = \omega_f(x_0) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \sup_{x_1, x_2 \in (x_0 - r, x_0 + r)} |f(x_1) - f(x_2)|$$

即 $\forall \epsilon > 0$, 当 $r \in (0, \delta)$ 时, 有 $\sup_{x_1, x_2 \in (x_0 - r, x_0 + r)} |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$.

取 $r = \frac{\delta}{2}$, $\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \sup_{x_1, x_2 \in (x_0 - r, x_0 + r)} |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon.$$

(a, b) 上单调函数间断点至多可数且为跳跃点.

证明: (1) 必跳跃:

单调有界数列定理+函数极限和数列极限关系定理

(2) 至多可数:

$$\text{间断点 } x_0 \iff (f(x_0^-), f(x_0^+)) \iff r_{x_0} \in \mathbb{Q}$$

连续是局部性质

$$f \in C(a, b) \overset{\text{def}}{\iff} f \text{ 在 } (a, b) \text{ 每点连续}$$

$$f \in C(a, b) \iff \text{开集的原像是开集.}$$

$$\forall G \subset \mathbb{R} \text{ 开} \implies f^{-1}(G) \subset (a, b) \text{ 开}$$

- 开集的定义

$$G \text{ 是开集} \stackrel{G \subset \mathbb{R}}{\iff} \forall x \in G, \exists (x - \delta, x + \delta) \subset G$$

- 原像的定义

$$f^{-1}(G) := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in G\}$$

连续是局部性质

必要性: $\forall$ 开集 G , 要证 $f^{-1}(G)$ 开.

$$\forall x_0 \in f^{-1}(G) \implies f(x_0) \subset G \text{ 开}$$

$$\implies \exists \epsilon > 0, \quad (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon) \subset G$$

$$\xRightarrow[\text{f连续}]{\exists \delta > 0} (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset f^{-1}(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon) \subset f^{-1}(G)$$

连续是局部性质(续)

充分性: $\forall x_0 \in (a, b)$, 要证 f 在 x_0 连续.

$\forall \epsilon > 0$, $(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ 是开集

$\implies f^{-1}(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ 是开集且包含 x_0

$\implies \exists \delta > 0$, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset f^{-1}(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$

连续复合运算

Theorem

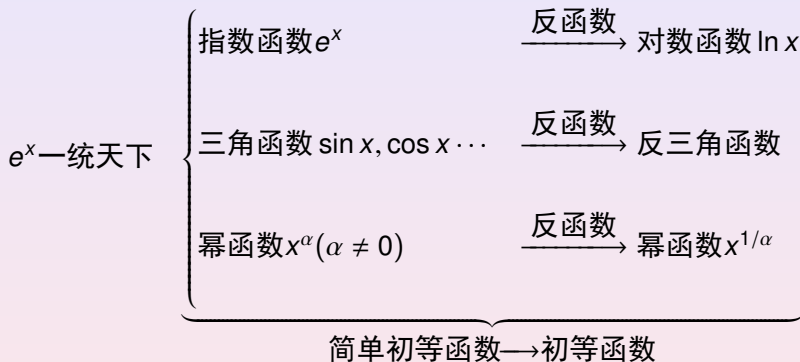
连续函数经有限次 $+$, $-$, $\times$, $\div$, 复合运算仍然连续

(除: 分母 $\neq 0$; 复合: 可复合)

证明:
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) \underset{y_0 = g(x_0)}{\overset{y = g(x)}} \lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = f(y_0) = f(g(x_0)).$$

- $\mathbb{R}$ 中加减乘除极限运算是范畴中对象的内在结构, 内政.
- 复合是范畴中态射, 外交.

初等函数



Theorem

初等函数在其定义域的开子集上连续

初等函数与绝对值关系

Theorem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ 存在且有限} \implies \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|.$$

证明: $|x| = \sqrt{x^2}$ 是初等函数, 连续.

Theorem

单调增加值域连通的函数必连续.

$$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \nearrow, \quad f(a, b) \text{ 连通} \implies f \in C(a, b).$$

Theorem

单调增加连续反函数必连续.

$$f \in C[a, b] \not\Rightarrow \xRightarrow{\text{值域连通}} f^{-1} \in C[f(a), f(b)].$$

$$f \in C(a, b) \not\Rightarrow \xRightarrow{\text{连续是局部性质}} f^{-1} \in C(f(a^+), f(b^-)).$$

第11次作业: [2.7] 1, 3, 5, 8, 9, 10

数学分析(A1), 第12次课

任广斌(中国科大)

2023-10-11

本次课主要内容

- 连续函数的性质
- 函数极限的计算

极限与连续比较

极限	连续
$\lim_{x_0 \neq x \rightarrow x_0} f(x) = s$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
$f(\hat{U}(x_0, \delta)) \subset (s - \epsilon, s + \epsilon)$	$f(U(x_0, \delta)) \subset (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$
$x_0 \neq x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow s$	$x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0)$
x_0 是空门	x_0 不是空门

连续性刻画三部曲

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$	$f _{U(x_0, \delta)} \xrightarrow{\epsilon \text{ 误差}} f(x_0)$	$f(U(x_0, \delta)) \subset U(f(x_0), \epsilon)$
定性	定量直观	定量精确

$$|x - x_0| < \delta \xrightarrow{\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0} |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

连续 $\xlongequal{\quad}$ 常值+lim

$$f \in C(a, b) \iff \text{开集的原像是开集.}$$

$$\forall G \subset \mathbb{R} \text{ 开} \implies f^{-1}(G) \subset (a, b) \text{ 开}$$

- 开集的定义

$$G \text{ 是开集} \stackrel{G \subset \mathbb{R}}{\iff} \forall x \in G, \exists (x - \delta, x + \delta) \subset G$$

- 原像的定义

$$f^{-1}(G) := \left\{ x \in \mathbb{R} : f(x) \in G \right\}$$

证明: 必要性.

$$\forall x_0 \in f^{-1}(G)$$

$$\implies f(x_0) \in G \text{ 开}$$

$$\xRightarrow{\exists \epsilon > 0} (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon) \subset G$$

$$\xRightarrow{\exists \delta > 0} (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset f^{-1}(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon) \subset f^{-1}(G).$$

充分性: $\forall x_0 \in (a, b)$, 要证 f 在 x_0 连续.

$\forall \epsilon > 0$, $(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ 是开集

$\implies f^{-1}(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ 是开集且包含 x_0

$\implies \exists \delta > 0$, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset f^{-1}(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$

- 连续是局部性质.
- 连续是粘合剂. 例如 $\chi_{\mathbb{Q}}$, Riemann 函数.
- $f(x) = f(x_0) + o(1) \quad (x \rightarrow x_0)$ 带Peano余项的Taylor展开.

- 极限与绝对值可交换:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \exists \implies \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|.$$

连续保极限

- 极限保加法

$$\begin{array}{ccccc} a_n & & & & \lim a_n \\ + & \longrightarrow & \boxed{\lim} & \longrightarrow & + \\ b_n & & & & \lim b_n \end{array}$$

- 连续保极限

$$\begin{array}{ccccc} a_n & & & & f(a_n) \\ \downarrow & \longrightarrow & \boxed{f} & \longrightarrow & \downarrow \\ \lim a_n & & & & \lim f(a_n) \end{array}$$

变量代换

$$x_0, y_0, s \in [-\infty, +\infty]$$

g 在 y_0 连续

$$\implies \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) \xrightarrow[\quad x \rightarrow x_0 \Rightarrow y \rightarrow y_0 \Rightarrow g(y) \rightarrow g(y_0) \quad]{\text{变量代换 } y=f(x)} \lim_{y \rightarrow y_0} g(y)$$

闭区间上连续函数

$$f \in C[a, b] \xLeftrightarrow{\text{def}} f \in C(a, b), f \text{ 在 } a \text{ 点右连续, 在 } b \text{ 点左连续.}$$

抽象空间中连续函数

- 假设 $X \neq \emptyset$, $\tau \subset 2^X$. 如果下列满足:
 - $X, \emptyset \in \tau$
 - $X_\alpha \in \tau \quad (\alpha \in \Lambda) \implies \bigcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \in \tau$
 - $X_1, X_2 \in \tau \implies X_1 \cap X_2 \in \tau$

则称 (X, τ) 拓扑空间, τ 中的元素称为 X 中的开集.

- 注意

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, 1 + \frac{1}{n}) = (0, 1]$$

- 假设 (X, τ) 是拓扑空间, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$.

f 连续 $\iff$ 开集的原像是开集

(即 $\forall G \subset \mathbb{R} \text{ 开} \implies f^{-1}(G) \in \tau$)

- $X \subset \mathbb{R}$, X 中具有由 $\mathbb{R}$ 诱导的拓扑 τ :

$$\tau = \{A \cap X : A \text{ 是 } \mathbb{R} \text{ 中的开集}\}$$

- 任意集合 $X \subset \mathbb{R}$:

$$f \in C(X) \quad \xLeftrightarrow{X \text{ 的开集} = \mathbb{R} \text{ 中开集} \cap X} \quad \text{开集的原像是开集.}$$

$f \in C(\mathbb{R})$, 周期函数, 非常值 $\implies f$ 必有最小正周期.

例题(续)

证明: $T_0 := \inf\{f\text{的周期}\} \xrightarrow{\star} T_0 > 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T_0) \xlongequal[f \in C(\mathbb{R})]{} \lim_{s \rightarrow x + T_0} f(s)$$

$$\xlongequal[T_n \text{ 是 } f \text{ 周期}]{\exists T_n \rightarrow T_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x + T_n) = f(x)$$

反证法: $T_0 = 0 \xRightarrow{\star\star} \{f \text{ 的周期} \} \subset (0, +\infty) \text{ 稠密}$

$\xRightarrow{\quad} \forall x \in (0, +\infty), \exists f \text{ 周期 } T_n \rightarrow x :$

$$f(x) = \lim_{s \rightarrow x} f(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(T_n) = f(0)$$

$\xRightarrow{\text{f 周期函数}} f(x) = f(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(★★)的证明: 否则, 存在 $(a - \epsilon_0, a + \epsilon_0)$, 该区间无 f 的周期.

$$\exists \quad |T_{n_0}| < \frac{\epsilon_0}{2} \quad (\text{这是因为 } T_n \rightarrow T_0 = 0)$$

但是 $(a - \epsilon_0, a + \epsilon_0)$ 长度 $=2\epsilon_0$, 必含有 T_{n_0} 的整数倍点, 必含有 f 的周期, 矛盾.

例题

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0, \quad f, g \text{ 是周期函数} \implies f = g$$

例题(续)

$$\text{证明: } 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x + nT_f) - g(x + nT_f))$$

$$\implies f(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} g(x + nT_f + nT_g)$$

$$\text{同理 } 0 \implies g(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} f(x + nT_f + nT_g).$$

两式相减.

$$[x] \sin(\pi x) \in C(\mathbb{R}).$$

证明: $\forall x \in \mathbb{R} \implies x \in [n, n+1), \quad n := [x]$

$\implies f(x) = n \sin(\pi x), \quad \forall x \in [n, n+1)$ 连续

$$f(n^+) = f(n^-) = f(n) = 0.$$

§8 极限计算

1^∞ 型极限: $u, v \in C(\mathbb{R}), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = \infty$

$$\implies \lim_{x \rightarrow x_0} u(x)^{v(x)} \implies \exp\left(\lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{(u(x) - 1)v(x)}_{0 \cdot \infty \text{型}}\right)$$

(续)

$$\text{左式} = \lim_{x \rightarrow x_0} \exp \left\{ (u(x) - 1)v(x) \ln(1 + (u(x) - 1))^{\frac{1}{u(x) - 1}} \right\} = \text{右式}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (1 + (u(x) - 1))^{\frac{1}{u(x) - 1}} \stackrel{y=u(x)-1}{=} \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e.$$

证法二:

$$\text{左式} = \lim_{x \rightarrow x_0} (1 + (u(x) - 1))^{\frac{1}{u(x) - 1} (u(x) - 1)v(x)} = \text{右式}$$

例题

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \stackrel{a > 0}{=} \ln a$$

$$y := a^x - 1 \implies x = \frac{\ln(1 + y)}{\ln a}$$

$$\implies \text{左边} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \ln a}{\ln(1 + y)} = \ln a$$

例题

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}} \underset{a_j > 0}{=} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

$$\begin{aligned}
 \text{左边} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{(a_1^x - 1) + \cdots + (a_n^x - 1)}{n} \right)^{\frac{1}{\frac{(a_1^x - 1) + \cdots + (a_n^x - 1)}{n}} \cdot \frac{(a_1^x - 1) + \cdots + (a_n^x - 1)}{nx}} \\
 &= e^{\frac{1}{n}(\ln a_1 + \cdots + \ln a_n)}
 \end{aligned}$$

例题

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}} \underset{a_j > 0}{=} \max\{a_1, \dots, a_n\}$$

不妨设 $a_k \nearrow$

$$\text{左边} \geq \left(\frac{a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}} = a_n \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{x}} \rightarrow a_n \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\text{左边} \leq \left(\frac{na_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}} = a_n$$

例题

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}} \underset{a_j > 0}{=} \min\{a_1, \dots, a_n\}$$

不妨设 $a_k \nearrow$. 令 $b_k := \frac{1}{a_k} \searrow$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}} & \quad \underline{\underline{y = -x}} \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{b_1^y + \cdots + b_n^y}{n} \right)^{\frac{1}{y}}} \\ & \quad \underline{\underline{=}} \quad \frac{1}{b_1} = a_1 = \min\{a_1, \dots, a_n\}. \end{aligned}$$

例题

$$\left(\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}} = \begin{cases} \max\{a_1, \cdots, a_n\}, & \text{最大值, } x = +\infty \\ \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}, & \text{算术平均, } x = 1 \\ \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}, & \text{几何平均, } x = 0 \\ \left(\frac{a_1^{-1} + \cdots + a_n^{-1}}{n} \right)^{-1}, & \text{调和平均, } x = -1 \\ \min\{a_1, \cdots, a_n\}, & \text{最小值, } x = -\infty \end{cases}$$

$$a_k > 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$f(x) = \left(\frac{a_1^x + \dots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}} \in C[-\infty, +\infty].$$

$$f(x) = \begin{cases} \text{常数}, & a_1 = a_2 = \dots = a_n \\ \text{严格单调增加} & \text{其它} \end{cases}$$

注记: 不妨设 $x > 0$, 不妨设 $x \geq 1$. 只要证明

$$x > 1 \implies f(x) > f(1).$$

证明来自于 $g(x) = x^a$ 是严格凸函数, 其中 $a > 1, x \in (0, +\infty)$.

第12次作业: [2.8] 3, 4

[2.3] 问题 2

数学分析(A1), 第13次课

任广斌(中国科大)

2023-10-13

本次课主要内容

- 一致连续

$\epsilon - \delta$ 语言 $\xrightarrow{\text{产生新概念}}$ 一致连续.

在一个区间连续

$I =$ 非退化区间, 例如 $(a, b), [a, b], \mathbb{R}$

$$f \in C(I) \iff \forall x_0 \in I, \forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0,$$

当 $x \in I, |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

注记：在一点连续

- 在一点处连续:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

- $\epsilon - \delta$ 语言

$$f|_{(x_0-\delta, x_0+\delta) \cap I} \xrightarrow{\epsilon \text{精度}} f(x_0).$$

$\overbrace{\quad \quad \quad}^{\delta}$ $\overbrace{\quad \quad \quad}^{\epsilon}$ 常值
局部 差不多
自变量接近 函数接近

注记：在区间连续

- 局部到底多大, 由 δ 刻画:

ϵ 给定, 对不同的 x_0 , δ 可能不同:

$$\delta = \delta(\epsilon, x_0)$$

一致连续	非一致连续
$f _{(x_0-\delta(\epsilon), x_0+\delta(\epsilon)) \cap I} \xrightarrow{\epsilon \text{精度}} f(x_0)$	$f _{(x_0-\delta(\epsilon, x_0), x_0+\delta(\epsilon, x_0)) \cap I} \xrightarrow{\epsilon \text{精度}} f(x_0)$

注记：一致性

- 一致由公共 δ 体现

一致连续	非一致连续
$\exists$ 公共 $\delta = \delta(\epsilon)$	$\nexists$ 公共 δ

常值 : 差不多常值 $\Longleftrightarrow$ 一致连续 : 连续

一致连续

假设 I 是区间, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

f 在 I 上一致连续 $\iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0, \forall x_0 \in I,$

当 $x \in I, |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

一致连续的例子

$\sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

证明: $|\sin x - \sin x_0| = 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \left| \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq |x - x_0|$

$\forall \epsilon \in (0, 1)$, 具有公共 $\delta = \epsilon$

一致连续最常用判别法

$$f' \text{ 有界} \xrightarrow[\text{Lipschitz}]{\text{中值定理}} f \text{ 一致连续.}$$

$$f \text{ Lipschitz} \xLeftrightarrow{f: I \rightarrow \mathbb{R}} \exists M > 0 : |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|, \quad \forall x, y \in I.$$

$$f \text{ Hölder} \xLeftrightarrow{f: I \rightarrow \mathbb{R}} \exists \alpha \in (0, 1), \exists M > 0 : |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha, \quad \forall x, y \in I.$$

一致连续Cauchy判别准则

f 在 I 上一致连续 $\iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon), \forall x', x'' \in I,$

当 $|x' - x''| < \delta$ 时, 有 $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) \stackrel{\forall x_n, y_n \in I}{=} 0$$

f 在 I 上一致连续 $\Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) - f(y_n)) = 0$$

非一致连续的典型例子

$\frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上非一致连续.

固定 ϵ , $x_0 \rightarrow 0^+ \implies \delta \rightarrow 0^+$, 不具有公共 δ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) \underset{y_n = \frac{1}{n+1}}{\overset{x_n = \frac{1}{n}}{=}} 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) - f(y_n)) = -1$$

一致连续Cauchy判别准则的另一表示方式

f 在 I 上一致连续 $\iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0, s.t.$

$$\sup_{\substack{|x' - x''| < \delta \\ x', x'' \in I}} |f(x') - f(x'')| < \epsilon.$$

注记:

$$\sup_{\substack{|x' - x''| < \delta \\ x', x'' \in I}} |f(x') - f(x'')| < \epsilon \iff f|_{(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I} \stackrel{\epsilon \text{精度}}{\overline{\forall x_0 \in I}} f(x_0).$$

一致连续判别准则

Theorem

$$f \text{ 在 } I \text{ 上一致连续} \iff \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{\substack{|x' - x''| < \delta \\ x', x'' \in I}} |f(x') - f(x'')| = 0.$$

例题： $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上非一致连续.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{\substack{|x' - x''| < \delta \\ x', x'' \in I}} |f(x') - f(x'')| \geq 1 \quad \left(\text{取 } \delta = \frac{1}{n}, x' = \frac{1}{n}, x'' = \frac{1}{n+1} \right)$$

非一致连续 $\epsilon - \delta$ 语言

f 在区间 I 上非一致连续 $\iff \exists \epsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x', x'' \in I,$
 $|x' - x''| < \delta$ 但 $|f(x') - f(x'')| \geq \epsilon_0.$

闭区间一致连续

Theorem

$f \in C[a, b] \iff f$ 在区间 $[a, b]$ 上一致连续.

紧=大点=存在公共 δ

一致连续	连续
整体概念	局部概念

闭区间一致连续(证明)

$$f \in C[a, b] \implies \forall \epsilon > 0, \forall x \in [a, b], \exists \delta_{\epsilon, x} > 0 :$$

$$\sup_{x', x'' \in (x - \delta_{\epsilon, x}, x + \delta_{\epsilon, x}) \cap [a, b]} |f(x') - f(x'')| < \epsilon$$

$$\implies I := (x - \frac{\delta_{\epsilon, x}}{2}, x + \frac{\delta_{\epsilon, x}}{2}) \cap [a, b] \text{ 具有公共 } \frac{\delta_{\epsilon, x}}{2} :$$

$$\sup_{\substack{y' \in I = (x - \frac{\delta_{\epsilon, x}}{2}, x + \frac{\delta_{\epsilon, x}}{2}) \cap [a, b] \\ y'' \in (y' - \frac{\delta_{\epsilon, x}}{2}, y' + \frac{\delta_{\epsilon, x}}{2})}} |f(y') - f(y'')| < \epsilon$$

$$\xRightarrow{\text{有限覆盖}} [a, b] \subset \bigcup_{k=1}^{k_0} (x_k - \frac{\delta_{\epsilon, x_k}}{2}, x_k + \frac{\delta_{\epsilon, x_k}}{2})$$

$$\text{取 } \delta_{\epsilon} := \min \left\{ \frac{\delta_{\epsilon, x_1}}{2}, \dots, \frac{\delta_{\epsilon, x_{k_0}}}{2} \right\}, \text{ 则}$$

$$\sup_{y'' \in (y' - \delta_{\epsilon}, y' + \delta_{\epsilon}) \cap [a, b]} |f(y') - f(y'')| < \epsilon$$

$$\implies f \text{ 在 } [a, b] \text{ 一致连续}$$

闭区间一致连续(续)

另一证明:

假设 $f \in C[a, b]$ 但在 $[a, b]$ 上非一致连续

$$\implies \exists \epsilon_0 > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists s_n, t_n \in [a, b] : |s_n - t_n| < \frac{1}{n}$$

但是 $|f(s_n) - f(t_n)| \geq \epsilon_0$

$$\implies \text{不妨设 } s_{k_n} \rightarrow s, \quad t_{k_n} \rightarrow s, \quad s \in [a, b]$$

$$\xRightarrow{f \in C[a, b]} 0 \leftarrow |f(s_{k_n}) - f(t_{k_n})| \geq \epsilon_0 \quad \text{矛盾}$$

有限区间上一致连续=闭区间连续

Theorem

设 (a, b) 是有限区间, 则

f 在有限区间 (a, b) 上一致连续 $\iff$ 存在 f 的延拓 $\in C[a, b]$

必要性证明:

在假设下, 利用Cauchy准则, $f(a^+), f(b^-)$ 存在

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (a, b) \\ f(a^+) & x = a \\ f(b^-) & x = b \end{cases}$$

$$F \in C[a, b], \quad F|_{(a,b)} = f$$

无限区间上一致连续

Theorem

f 在 $\mathbb{R}$ 上连续,在端点处极限存在 $\implies f$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续

反之不成立, 反例: $\sin x$

$f \in C[a, +\infty)$, $f(+\infty)$ 存在且有限 $\implies f$ 在 $[a, +\infty)$ 一致连续

无限区间上一致连续(续)

证明:

$$f(+\infty)\text{存在且有限} \implies \forall \epsilon > 0, \exists M > a : \sup_{x', x'' \geq M} |f(x') - f(x'')| < \epsilon.$$

$$f \in C[a, +\infty) \implies \exists \delta_1 > 0 : \sup_{\substack{|x' - x''| < \delta_1 \\ x', x'' \in [a, M+2]}} |f(x') - f(x'')| < \epsilon.$$

取 $\delta = \min(\delta_1, 1)$:

$$(1) \quad x' \in [a, M+1] \implies x', x'' \in [a, M+2].$$

$$(2) \quad x' \in [M+1, \infty) \implies x', x'' \in [M, \infty).$$

$$\text{综上所述} \quad \sup_{|x' - x''| < \delta} |f(x') - f(x'')| < \epsilon.$$

在区间上连续和局部一致连续等价

连续 $\Longleftrightarrow$ 局部一致连续

$$f \in C(I) \Longleftrightarrow f \text{ 在 } I \text{ 上局部一致连续.}$$

注记：局部放置在闭区间内.

一致连续的拼接

f 在 $(a, b], [b, c)$ 一致连续 $\implies f$ 在 (a, c) 一致连续.

证明: f 分别在三个区间选取公共 δ :

$$(a, b], \quad [b, c), \quad \left[\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}\right].$$

一致连续在乘积运算下的性态

f, g 在 $[a, +\infty)$ 上有界且一致连续 $\implies fg$ 在 $[a, +\infty)$ 一致连续.

- 有界性条件不可去.
- 一致连续在乘积运算下不保持:

反例: $x, \sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续, $x \sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上非一致连续.

$$\text{取 } x'_n = 2n\pi, \quad x''_n = 2n\pi + \frac{1}{n}.$$

证明: 利用三角不等式.

$$\begin{aligned}|f(x')g(x') - f(x'')g(x'')| &= |f(x')(g(x') - g(x'')) + g(x'')(f(x') - f(x''))| \\&\leq M(|g(x') - g(x'')| + |f(x') - f(x'')|) \\&\leq 2M\epsilon \quad (|x' - x''| < \delta)\end{aligned}$$

非周期性的判别方法

$\mathbb{R}$ 上连续但非一致连续函数，必定是非周期函数

- 一致连续的用途(副产品):

判断非周期性.

证明: 反证. 若 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是以 T 为周期的连续函数,
则 $f \in C[-2T, 2T]$ 在 $[-2T, 2T]$ 一致连续.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta \in (0, T):$$

$$|x' - x''| < \delta, x', x'' \in [-2T, 2T] \implies |f(x') - f(x'')| < \epsilon$$

因此

$$|x' - x''| < \delta, \quad \forall x', x'' \in \mathbb{R}$$

$$\xRightarrow{\exists k \in \mathbb{Z}} x' - kT \in [0, T), \quad x'' - kT \in [-2T, 2T]$$

$$\implies |f(x') - f(x'')| = |f(x' - kT) - f(x'' - kT)| < \epsilon$$

$$\underbrace{\sin^2 x}_{\text{一致}} + \underbrace{\sin(x^2)}_{\text{非一致}} \text{ 非周期}$$

$$\text{取 } x'_n = \sqrt{2n\pi}, \quad x''_n = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}.$$

第13次作业: [2.9] 1

问题 1, 2

数学分析(A1), 第14次课

任广斌(中国科大)

2023-10-16

本次课主要内容

- 闭区间连续函数 (§10)
- 上半连续函数 (§11)

- 有界性:

紧集上连续函数必有界.

$$f \in C[a, b] \implies f \text{ 在 } [a, b] \text{ 有界.}$$

证明: 通过常值延拓, 不妨设 $f \in C(\mathbb{R})$.

$$\implies [a, b] \subset \bigcup_{\substack{x \in [a, b] \\ \text{(有限)}}} (x - \delta_x, x + \delta_x)$$

$f|_{(x-\delta_x, x+\delta_x)}$ 有界

紧集上连续函数必取到最大值和最小值.

$f \in C[a, b] \implies f$ 在 $[a, b]$ 上达到最大值和最小值.

证明: $M := \sup_{x \in [a, b]} f(x) < +\infty.$

$$\implies \exists \{x_n\} \subset [a, b] : \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = M$$

$$\implies \text{取子列 } x_{k_n} \rightarrow \xi \in [a, b] \quad f(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{k_n}) = M$$

紧集 $[a, b]$ 上连续函数, 若在边界异号, 则在内部具有零点.

$$f \in C[a, b], \quad f(a)f(b) < 0 \implies \exists \xi \in (a, b) : f(\xi) = 0.$$

- 边界信息体现内部信息:

两点(函数异号) $\xRightarrow{\text{提供}}$ 一个零点

- 几何意义: 从实轴的下方穿越到上方时, 必经过实轴($\mathbb{R}$ 完备)

- 三要素： 闭区间、连续、异号.

- 方法: 将异号性质, 通过二等分区间套, 挤压到一点处.

信息 $\xrightarrow{\text{区间套}}$ 凝聚到一点

零值定理的证明

二等分区间套:

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{\xi\}$$

不妨设 $f(a_n)f(b_n) < 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n, b_n \rightarrow \xi \in [a, b]$

$$\implies f^2(\xi) \leq 0.$$

介值定理

$f \in C[a, b]$, γ 介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间

$\implies \exists c \in [a, b] : f(c) = \gamma.$

证明: 不妨设 $\gamma \in (f(a), f(b))$.

对于 $F(x) := f(x) - \gamma$ 利用零值定理即可.

值域定理

$$f \in C[a, b] \implies f[a, b] = \left[\min_{x \in [a, b]} f(x), \max_{x \in [a, b]} f(x) \right]$$

证明: 取 $x_*, x^* \in [a, b]$:

$$f(x_*) = \min_{x \in [a, b]} f(x) =: m, \quad f(x^*) = \max_{x \in [a, b]} f(x) =: M$$

不妨设 $x_* \leq x^*$

则 $[m, M] \supset f[a, b] \supset f[x_*, x^*] \xrightarrow{\text{介值定理}} [m, M]$

连续函数保号： 将地上的绳子一端提起来, 其周边会带起来.

连续函数的粘性.

连续函数性质总结

连续函数保紧, 保连通

有界闭区间上连续函数 →

有界、最值、零值、介值、值域等定理.

- 上极限和下极限保序性:

$$\begin{aligned} f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \\ \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x), \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} g(x). \end{aligned}$$

$$\text{取 } x_n \rightarrow x_0 : \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$$\text{取子列 } x_{k_n} : \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_{k_n}) \exists (\text{有限或无穷}).$$

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} g(x) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_{k_n}) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{k_n}) = \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

上半连续的 $\epsilon - \delta$ 刻画

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0) \iff \forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \text{ 当 } |x - x_0| < \delta \text{ 时,} \\ f(x) < f(x_0) + \epsilon$$

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0) \iff \forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \text{ 当 } |x - x_0| < \delta \text{ 时,} \\ f(x) > f(x_0) - \epsilon$$

证明: 充分性: $\forall \epsilon > 0, \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0) + \epsilon.$

必要性: 反证法: $\exists \epsilon_0 > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})$

但是 $f(x_n) \geq f(x_0) + \epsilon_0$

$\implies$ 取 $x_{k_n} \rightarrow x_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{k_n}) \geq f(x_0) + \epsilon_0$

$\implies \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0) + \epsilon_0.$

奇次实系数多项式必有实数根.

证法1: $p(x) = x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \cdots + a_{2n+1} \in C(\mathbb{R})$

$$\implies \lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x) = \pm\infty$$

$$\implies \exists [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}, p(\alpha) < 0, p(\beta) > 0$$

$$\implies \exists \xi \in [\alpha, \beta], p(\xi) = 0$$

证法2: 实系数多项式的共轭根成对出现.

- 复分析处理实分析的威力: $\mathbb{C}$ 是完备域

$$f, g \in C[0, +\infty), \quad f \geqslant 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(f(x)) = +\infty$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$

证明: 反证法: $\exists M_0 > 0, \exists \{x_n\} : x_n > n, \text{但 } f(x_n) \in [0, M_0]$

$$\text{令 } K := \max_{x \in [0, M_0]} g(x)$$

$\implies x_n > n, \text{ 但 } g(f(x_n)) \leq K, \text{ 与 } \lim_{x \rightarrow \infty} g(f(x)) = +\infty \text{ 矛盾}$

$$f \in C[0, +\infty), \quad n \in \mathbb{N}$$

$$f^2(x) \leq 2x^n f(2^{-\frac{1}{n}}x), \quad \forall x \in [0, +\infty)$$

$$\implies 0 \leq f(x) \leq x^n.$$

证明: 显然 $f(0) = 0$, $f(x) \geq 0$.

只要证明 $F(x) \leq 0$. 其中 $F(x) := f(x) - x^n$.

反证法: 存在 $M > 0$, s.t. $F(M) > 0$.

$$\text{取 } x_0 \in [0, M]: \quad F(x_0) = \max_{x \in [0, M]} F(x)$$

$$\implies (F(x_0) + x_0^n)^2 \leq 2x_0^n(F(2^{-\frac{1}{n}}x_0) + \frac{1}{2}x_0^n)$$

$$\implies F(x_0) < F(2^{-\frac{1}{n}}x_0) \text{ 与 } x_0 \text{ 的选取矛盾}$$

$f \in C[0, +\infty)$ 有界,

$$\implies \forall \lambda \in \mathbb{R}, \exists x_n \rightarrow +\infty : \lim_{n \rightarrow +\infty} (f(\lambda + x_n) - f(x_n)) = 0$$

例题(续)

证明: 只要证明

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \geq n: |f(\lambda + x_n) - f(x_n)| < \frac{1}{n}.$$

例题(续)

反证法: 存在 $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall x \geq n_0$: $|f(\lambda_0 + x) - f(x)| \geq \frac{1}{n_0}$.

$$\Longrightarrow \lambda_0 \neq 0$$

$$\Longrightarrow \text{不妨设 } f(\lambda_0 + x) - f(x) \geq \frac{1}{n_0}$$

$$\begin{array}{c} \text{令 } x=n_0, \dots, n_0+(m-1)\lambda_0 \\ \Longrightarrow \\ \text{相加} \end{array} \quad f(m\lambda_0 + n_0) - f(n_0) \geq \frac{m}{n_0} \rightarrow \infty \quad (m \rightarrow \infty)$$

$$\Longrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} f(m\lambda_0 + n_0) = +\infty \text{ 与 } f \text{ 有界矛盾}$$

例题

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \sin kx \right| \leq |\sin x|, \quad \forall x \in (-1, 1) \implies \left| \sum_{k=1}^n k a_k \right| \leq 1$$

相除, 再令 $x \rightarrow 0$.

计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \cos(\pi n! x) \right\}^{2k} \right\}$$

第14次作业: [2.10] 5, 7, 9, 11.

问题 2, 4

[2.11] 2, 3.

数学分析(A1), 第15次课

任广斌(中国科大)

2023-10-18

课程内容安排

微积分	单变量微分学	导数	(Ch3)	8讲
		导数的应用(Taylor)	(Ch4)	4讲
	单变量积分学	不定积分	(Ch5)	4讲
		定积分	(Ch6)	10讲
		积分的应用	(Ch7)	5讲

- 导数和积分是一对互逆运算, 是微积分的主要矛盾.
- 导数和积分犹如硬币的两面, 地位等价.
- 导数和积分是由极限派生出的一种运算, 导数是差商的极限, 积分是和式的极限.
- 导数的重要性在于导数是变化率, 是描述变化的世界的最重要手段. 积分的重要性在于积分是集腋成裘的方法, 通过微元法积分可处理非规则情形.
- 极限=级数=离散测度的积分. 极限、导数、积分的地位等价.

本次课主要内容

- 导数的定义
- 复合函数导数的链式法则

第三章: 导数 (微积分启航)

连续	连绵不断	C^0	局部常值	Taylor展开到零次项
可导	光滑	弱 C^1	以直代曲	Taylor展开到1次项

$$f(x) = f(x_0) + o(1) \quad (x \rightarrow x_0)$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad (x \rightarrow x_0)$$

假设 $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$.

f 在 x_0 处可导(可微) $\stackrel{\text{def}}{\iff} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0)$ 存在有限.

$$f'(x_0) = f'(x)|_{x=x_0} = \frac{df}{dx}(x_0) = y'(x_0).$$

注意 $f'(x_0) \neq (f(x_0))'$.

导数数学意义

- 导数=变化率 (描述变化的天然手段)

自变量 $x_0 \longrightarrow x_0 + h$

函数值 $f(x_0) \longrightarrow f(x_0 + h)$

平均变化率 $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0}$ (四则运算)

瞬时变化率 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0}$ (极限运算)

导数 极限观点 $\frac{0}{0}$ 型极限 ===== 差商极限

两个独立变量

流形	切丛
曲线	切线
曲线变量 x_0	切线变量 h
曲线方程 $y = f(x)$	切线方程 $y = f(x_0) + f'(x_0)h$

- 单变量微积分需要多变量 (x_0, h) 帮助.

曲线上函数论——切线上线性理论

- 曲线和切线差别: 产生多变量 (x_0, h) .

切线来源于极限(割线的极限), 与曲线密切.

- 曲线和切线等同: 微元法的数学基础.

在只涉及 $f(x_0)$, $f'(x_0)$ 时, 曲线和切线无法分别, 可以等同.

- 曲线和切线构成一维流形上的一维纤维丛:

由此产生Maxwell方程组, Yang-Mills理论.

- 后继课程都含有微积分的影子。

导数的最广场所是纤维丛上的微积分.

积分的最广场所是实分析.

导数是放大率

区间 $[x_0, x_0 + h]$ 端点 $\xrightarrow{f}$ 区间 $[f(x_0), f(x_0 + h)]$ 端点

区间长度 h $\xrightarrow[f'(x_0)]{\text{放大率}}$ 区间长度 $f(x_0 + h) - f(x_0) \doteq f'(x_0)h$

导数几何意义

- 导数是切线斜率: α 是切线和实轴夹角.

$$f'(x_0) = \tan \alpha$$

- 割线方程:

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_0 + \epsilon) - f(x_0)}{\epsilon}(x - x_0)$$

- 切线方程:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

- 距离(位移)函数关于时间变量的导数是瞬时速度

平均速度 $\frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}$

瞬时速度 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t} = S'(t_0)$

左右导数

- 利用左右极限刻画导数

$$f'(x_0) \text{ 存在} \iff f'_\pm(x_0) \text{ 存在且相等}$$

- 右导数

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- 左导数

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

可导是局部概念

f 在开区间 (a, b) 上可导 $\iff f$ 在 (a, b) 每一点可导.

连续性、可导性是局部概念, 可积性是整体概念

可导 : 可积 $\implies$ 局部 : 整体

f 在区间 I 上可导 $\xLeftrightarrow{\text{例如 } I = [a, b]}$ f 在 I° 可导, 在端点单侧可导

函数 f $\xrightarrow{\text{求导}}$ 导函数 f'

$$\underbrace{\overbrace{f'}^{\text{与 } f \text{ 相关}}}_{\text{导函数}}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- 圆面积的导数=周长

$$\pi(r + \Delta r)^2 = \pi r^2 + 2\pi r \Delta r + o(\Delta r), \quad \Delta r \rightarrow 0.$$

$$\frac{\Delta S}{\Delta r} \doteq 2\pi r, \quad (\pi r^2)' = 2\pi r$$

- 球体积的导数=表面积

可导必连续

连续	$f(x) = f(x_0) + o(1) \quad (x \rightarrow x_0)$
可导	$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad (x \rightarrow x_0)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) = 0.$$

光滑与可导

- 函数光滑 $\iff f \in C^1$
- 函数可导 $\iff f$ 的导数存在且有限
- 函数图形光滑 $\neq$ 函数光滑.

反例: $f(x) = \sqrt[3]{x}$

该函数图形光滑, 但是函数非光滑, 在0点处切线是y轴,
 $f'(0) = \infty$.

- 假设函数连续. 则函数图形光滑=函数图形无尖点.

例子: $f(x) = \sqrt{x^2}$ 以0为尖点.

§2 链式法则

f 在 x_0 处可导, g 在 $y_0 := f(x_0)$ 处可导,

$\implies g \circ f$ 在 x_0 处可导,

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0).$$

- 函数 f 在 x_0 附近先放大 $f'(x_0)$ 倍,
- 其次函数 g 在 y_0 附近再放大 $g'(y_0)$ 倍.
- 函数 f 和函数 g 连续作用, 在 x_0 附近放大倍数

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$$

链式法则另一形式

$$z = g(y), \quad y = f(x)$$

$$\implies \left. \frac{dz}{dx} \right|_{x_0} = \left. \frac{dz}{dy} \right|_{y_0} \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_0}$$

- 去除极限外衣:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\text{变量: } z = g(y), \quad y = f(x), \quad z_0 = g(y_0), \quad y_0 = f(x_0)$$

$$\text{(绝对)改变量: } \Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0, \quad \Delta z = z - z_0$$

多重复合链式法则

$$y = h(u), \quad u = g(v), \quad v = f(x)$$

$$\implies \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dv} \frac{dv}{dx}$$

见到方程就求导

$$F(x) = g(f(x)) \implies F'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

链式法则的证明

- $G(y)$ 在 y_0 处连续:

$$G(y) := \begin{cases} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} & y \neq y_0 \\ g'(y_0) & y = y_0. \end{cases}$$

- 恒等式:

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = G(f(x)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} G(f(x)) = G(y_0) = g'(f(x_0)).$$

$f \in C[a, b]$ 在 $x_0 \in (a, b)$ 可导,

$\implies f^{-1}$ 在 $y_0 = f(x_0)$ 可导当且仅当 $f'(x_0) \neq 0$.

当 $f'(x_0) \neq 0$ 时, $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

反函数求导

- 反函数导数公式:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}, \quad x'(y) = \frac{1}{y'(x)}.$$

- 反函数导数几何意义:

$$y = f(x) \xrightarrow{x, y \text{ 地位相同}} x = f^{-1}(y)$$

$$f'(x_0) = \tan \alpha, \quad (f^{-1})'(y_0) = \tan \beta, \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

反函数求导的证明

必要性:

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$$\implies (f^{-1})'(f(x_0)) f'(x_0) = 1, \quad f'(x_0) \neq 0$$

充分性:

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \stackrel{f \text{ 连续}}{=} \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{x - x_0}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

求导的四则运算

f, g 在 x 可导, 则 f 和 g 的四则运算在 x 可导 (除: $g(x) \neq 0$)

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

降级运算

$$F(x) = f(x)g(x) \implies \ln |F(x)| = \ln |f(x)| + \ln |g(x)|$$

$$\implies \frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \implies \ln |F(x)| = \ln |f(x)| - \ln |g(x)|$$

$$\implies \frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)}$$

除法化为乘法

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x)\frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x)\frac{1}{g(x)} - f(x)\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

例题

$$y = \ln x \implies x = e^y \implies 1 = e^y y' \implies y' = \frac{1}{x}$$

$$y = x^\mu \implies y = e^{\mu \ln x} \implies y' = e^{\mu \ln x} \mu \frac{1}{x} = \mu x^{\mu-1}$$

简单初等函数求导

$$(1) \quad (c)' = 0$$

$$(2) \quad (e^x)' = e^x, \quad (a^x)' = a^x \ln a, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(3) \quad (x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(4) \quad (\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x, \quad (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

第15次作业: [3.1] 5, 6, 10,

[3.2] 1 (12-30偶数题), 7

[3.2] 问题 1, 3

数学分析(A1), 第16次课

任广斌(中国科大)

2023-10-20

本次课主要内容

- 高阶导数(§3)
- Fermat定理(§4)
- 微分中值定理 (Rolle, Langrange, Cauchy)

§3 高阶导数

$$f(x) \xrightarrow{\text{求导}} f'(x) \xrightarrow{\text{求导}} f''(x) \xrightarrow{\text{求导}} \dots \longrightarrow f^{(n)}(x) \longrightarrow \dots$$

$$f^{(n)}(x_0) \exists \iff \begin{cases} f^{(n-1)}(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 某领域有定义} \\ f^{(n-1)}(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 处可导.} \end{cases}$$

导数的用途 多次的一阶逼近 产生函数的Taylor展开.

Taylor展开系数公式

$$f(x) = \overbrace{c_0 + c_1(x-x_0) + \cdots + c_n(x-x_0)^n}^{\text{先求导: 杀掉低阶项}} + \underbrace{\cdots}_{\text{再令 } x = x_0: \text{杀掉高阶项}}$$

幸存项

$$\implies f^{(n)}(x_0) = n!c_n \implies c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

特例:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ 在原点附近成立} \implies c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

特别给出了多项式的系数公式。

Taylor展开精髓

- Taylor展开的精髓:

$$\underbrace{f(x)}_{\text{不可数信息}} \xrightleftharpoons[\text{Taylor展开}]{\text{系数公式}} \underbrace{\{c_0, c_1, \dots, c_n, \dots\}}_{\text{可数信息}}$$

- Taylor展开是函数的原子分解(类似于实数的十进制表示).

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n}_{\text{函数的原子}}.$$

2次Taylor多项式决定函数局部性质

Taylor展开:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

一阶导数	二阶导数
斜率	曲率
速度	加速度

宇宙的简洁原则: 二阶及其以下导数决定宇宙规则.

修正的Riemann函数

$\widetilde{R} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 周期为2的函数, 在 $[-1, 1]$ 为偶函数

$$\widetilde{R}(x) \stackrel{\forall x \in (0,1]}{=} \begin{cases} \frac{1}{q}x & x = \frac{p}{q}, \quad (p, q) = 1, \quad p, q \in \mathbb{N} \\ 0 & x = 0 \text{ 或无理数} \end{cases}$$

$\widetilde{R}(x)$ 在 $x = 0$ 可导, 在其它点不可导.

高阶导数线性性

$$(\lambda f + \mu g)^{(n)}(x) = \frac{f^{(n)}(x) + \mu g^{(n)}(x)}{\lambda, \mu \in \mathbb{R}} = \lambda f^{(n)}(x) + \mu g^{(n)}(x).$$

Leibniz公式

$$(f g)^{(n)}(x) \stackrel{f, g \in C^\infty(\mathbb{R})}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

$$(f g)^{(n)}(x) \stackrel{f, g \in C^\infty(\mathbb{R})}{=} \sum_{k=0}^n C(n, k) f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

取 $f(x) = x^{n-k}$, $g(x) = x^k$.

等式在 $x = 0$ 处取值, 则 $n! = c(n, k)(n-k)!k!$

假设 $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$, 则

$$(g \circ f)^{(n)}(x) = \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = k \\ 1k_1 + \dots + nk_n = n}} \frac{n!}{k_1! \dots k_n!} g^{(k)}(f(x)) \underbrace{\left(\frac{f'(x)}{1!} \right)^{k_1} \dots \left(\frac{f^{(n)}(x)}{n!} \right)^{k_n}}_{\substack{f, g \text{ 导数的总阶数} = k \\ f \text{ 各阶导数地位相同时} \\ f \text{ 导数的总阶数} = n}}$$

注记: $1k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n \neq 0 \implies k_i \text{ 不全为零} \implies k \neq 0$

二项式展开定理

$$(x_1 + \cdots + x_n)^k = \sum_{k_1 + \cdots + k_n = k} \frac{k!}{k_1! \cdots k_n!} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$$

$$(x_1 + \cdots + x_n)^k = \sum_{k_1 + \cdots + k_n = k} C_{k_1 \cdots k_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$$

$$\left. \frac{\partial^{k_1}}{\partial x_1^{k_1}} \cdots \frac{\partial^{k_n}}{\partial x_n^{k_n}} \right|_{x_1 = \cdots = x_n = 0} \quad \text{作用得} \quad k! = C_{k_1 \cdots k_n} k_1! \cdots k_n!.$$

Faà di Bruno公式的证明

$$(g \circ f)^{(n)}(x) = \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = k \\ 1k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n}} c(n, k_1, \dots, k_n) g^{(k)}(f(x)) \left(\frac{f'(x)}{1!} \right)^{k_1} \dots \left(\frac{f^{(n)}(x)}{n!} \right)^{k_n}$$

取 $g(y) = y^k$, $f(x) = a_1x + \dots + a_nx^n$

$$g \circ f(x) = (a_1x + \dots + a_nx^n)^k = \sum_{k_1 + \dots + k_n = k} \frac{k!}{k_1! \dots k_n!} x^{1k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n} a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n},$$

两种方法计算 $g \circ f^{(n)}(0)$:

$$\sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = k \\ 1k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n}} \frac{k!}{k_1! \dots k_n!} n! a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n} = \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = k \\ 1k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n}} c(n, k_1, \dots, k_n) k! a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n}$$

例题

$$(e^x)^{(n)} = e^x$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^{(n)} & \quad \underline{\underline{\text{拆项法}}} \quad \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right)^{(n)} \\ & \quad \underline{\underline{=}} \quad \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} - \frac{n!(-1)^n}{(1+x)^{n+1}} \end{aligned}$$

§4 中值定理

假设 f 在 x_0 的一个领域有定义.

x_0 是 f 的极大值点 $\stackrel{\text{def}}{\iff} f(x) \leq f(x_0)$ 在 x_0 的某领域成立.

x_0 是 f 的严格极大值点 $\stackrel{\text{def}}{\iff} f(x) < f(x_0)$ 在 x_0 的某去心领域成立.

f 在 x_0 处取到极值, f 在 x_0 处可导 $\implies f'(x_0) = 0$

Fermat定理(续)

证明:

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\text{极值点定号}}}{\underbrace{x - x_0}_{\text{左右极限符号改变}}}$$

$$f'_+(x_0)f'_-(x_0) \leq 0, \quad f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$$

$$\implies f'(x_0) = 0$$

- f 的驻点 $\overset{\text{def}}{\iff}$ 导数为零的点.
- f 的极值点 $x_0 \xrightarrow{\text{假设 } x_0 \text{ 是 } f \text{ 的可导点}} x_0 \text{ 是 } f \text{ 的驻点}$
- 极值点可以不是可导点

$$f(x) = |x|, \quad \text{在 } x = 0 \text{ 取极小值点.}$$

$f \in C[a, b]$, 在 (a, b) 可导, $f(a) = f(b)$

$\implies \exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0.$

- 口诀:

函数 f 的两个零点 $\xrightarrow{\text{提供}}$ 导函数 f' 的一个零点

- 根源:

$$\underbrace{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}_{\text{平均变换率}} = \underbrace{f'(\xi)}_{\text{瞬时变化率}}$$

- 边界点性质决定内部性质:

边值问题	零点问题
函数 f	导函数 f'

- 有了导数以后, 方程视为变分方程:

变分方程 $\Longleftrightarrow$ 极值问题

宇宙规则: 自然界的方程是使得某作用量达到极小值。

- 变分方程的边值问题有解:

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(a) = f(b) \end{cases}$$

Rolle定理注记

- ξ (读音: ksai)不唯一:

具体位置不明, ξ 称为中值

- 三要素:

$$x\chi_{[0,1]}(x) \quad x \in [0, 1]$$

$$|x| \quad x \in [-1, 1]$$

$$x \quad x \in [0, 1]$$

Rolle定理的证明

证明: f 的最大值和最小值点必有一个在内点达到

$$\begin{array}{c} \text{该点记为}\xi \\ \hline \text{Fermat定理} \end{array} \Rightarrow f'(\xi) = 0.$$

Lagrange定理

$f \in C[a, b]$, 在 (a, b) 可导

$$\implies \exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

- 带Lagrange余项的零阶Taylor展开:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{\text{零阶Taylor多项式}} + \underbrace{f'(\xi)(x - x_0)}_{\text{Lagrange余项}} .$$

- 利用导数估计函数:

$$f \in C(a, b) \xrightarrow{f' \text{ 在 } (a, b) \text{ 有界}} \begin{aligned} &f \text{ 在 } (a, b) \text{ Lipschitz} \\ &f \text{ 在 } (a, b) \text{ 一致连续} \end{aligned}$$

Lagrange定理的物理意义

平均速度在某一时刻达到 $\overline{\quad}$ 瞬时速度

经平移旋转, 函数图形端点位于实轴上

曲线 $\xrightarrow{\text{平移+旋转}}$ 曲线—割线

$$f(x) \qquad f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \right)$$

图形端点位于实轴上

$f, g \in C[a, b]$, 在 (a, b) 可导, g' 在 (a, b) 恒不为零

$$\implies \exists \xi \in (a, b) : \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Cauchy定理几何意义

- 曲线在 $t = \xi$ 处切线斜率

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t) \end{cases} \xrightarrow{\text{链式法则}} \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\xi} = \left. \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \right|_{t=\xi} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

- 曲线的割线斜率:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Cauchy定理的变分方程形式

$$\left((f(x) - f(a)) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a)) \right)' = 0$$

三个中值定理等价

$$Cauchy \xrightarrow{g(x)=x} Lagrange \xrightarrow{f(a)=f(b)} Rolle \xrightarrow{\text{变分方程}} Cauchy.$$

中值定理建立函数 f 及其导数 f' 的联系, 十分重要有用的联系.

例题

$f, g \in C[a, b]$, 在 (a, b) 可导, $f(a) = f(b) = 0$

$\implies \exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) + f(\xi)g'(\xi) = 0.$

证明: 变分方程:

$$\left(f(x)e^{g(x)} \right)' \Big|_{x=\xi} = 0$$

注记: 结论等价于方程 $f'(x) + f(x)g'(x) = 0$ 存在解, 归结于解方程问题。这是可分离变量方程。

中值的存在性等价于解方程

中值的存在性：

$$\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) + f(\xi)g'(\xi) = 0.$$

$\Longleftrightarrow$ 方程存在解：

$$f'(x) + f(x)g'(x) = 0 \text{ 具有解 } x = \xi$$

$$f'(x) + f(x)g'(x) \xrightarrow[\text{乘以} e^{g(x)}]{\text{凑成一个函数的导数}} (f(x)e^{g(x)})'$$

推导过程:

$$u(x)(f'(x) + f(x)g'(x)) = (f(x)u(x))'$$

$$\implies u'(x) = u(x)g'(x)$$

$$\xRightarrow{\text{取}} u(x) = e^{g(x)}$$

第16次作业: [3.3] 5, 问题 6, 7, 8

[3.4] 2, 3, 5

数学分析(A1), 第17次课

任广斌(中国科大)

2023-10-23

本次课主要内容

- 无穷区间上中值定理
- Darboux中值定理
- 导函数可去奇点定理

中值定理的作用

- 中值定理建立函数及其导数的联系和信息传递
- 中值定理给出初等函数与多项式函数的误差估计
- 导函数可去奇点定理

无穷区间上Rolle定理

f 在 (a, b) 可导, $f(a^+) = f(b^-) = A$

$$\underline{\underline{a, b, A \in [-\infty, +\infty]}} \implies \exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0.$$

无穷区间上Rolle定理

- Rolle定理在扩充实轴成立:
- 无穷区间上Rolle定理的条件:

在边界点处具有相同极限值 $\xRightarrow{\text{提供}}$ 导函数的一个零点

- 双射

$$\begin{aligned} C[-\infty, +\infty] &\longrightarrow C[a, b] \\ f &\longmapsto f \circ \tau^{-1} \end{aligned}$$

$$f = (f \circ \tau^{-1}) \circ \tau.$$

- 双射(初等函数)

$$\tau : [-\infty, +\infty] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [a, b]$$

$$\tau(x) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{\pi} \arctan x.$$

- 无穷区间上的Rolle定理的证明:

令 $g(x) = f \circ \tau^{-1}$, 则 $f = g \circ \tau$.

$$f'(\xi) \frac{\eta = \tau(\xi)}{\xi = \tau^{-1}(\eta)} = g'(\eta) \frac{b-a}{\pi} \frac{1}{1+\xi^2}.$$

- 思考题: $[0, +\infty)$ 情形?

- 通过缩小 (a, b) , 可不妨设 $A \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 A = +\infty & \xrightarrow[\substack{\text{取定 } x_0 \in (a, b) \\ M := 1 + f(x_0)}}{\quad} \exists c_1 \in (a, x_0) : \quad f(c_1) > M \\
 & \xrightarrow[\substack{\text{介值定理} \\ f(x_0) < M}]{\quad} \exists c \in (c_1, x_0) : \quad f(c) = M \\
 & \xrightarrow[\text{同理}]{\quad} \exists d \in (x_0, d_1) : \quad f(d) = M
 \end{aligned}$$

$A = -\infty$ 情形类似

- 再次通过缩小 (a, b) , 可不妨设 $a, b \in \mathbb{R}$.
- 可不妨设 f 不恒为常数 A .
- $\exists x_0 \in (a, b): f(x_0) \neq A$. 不妨设 $f(x_0) < A$.
- 令 $M = \frac{A + f(x_0)}{2} \implies f(x_0) < M < A$.

$$A = f(a^+) \xRightarrow{\text{右极限定义}} \exists c_1 \in (a, x_0): f(c_1) > M$$

$$\xRightarrow{\text{介值定理}} \exists c \in (c_1, x_0): f(c) = M$$

$$\xRightarrow{\text{同理}} \exists d \in (x_0, d_1): f(d) = M.$$

无穷区间上Cauchy中值定理

f, g, h 在 (a, b) 可导, 在端点处单侧极限存在有限, $a, b \in [-\infty, +\infty]$

$\implies \exists \xi \in (a, b) :$

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix} = 0$$

- 变分方程

$$\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(x) & g(x) & h(x) \end{vmatrix} = 0$$

中值定理统一

$h=1$			Cauchy中值定理
$h=1$	$g(x) = x$		Lagrange中值定理
$h=1$	$g(x) = x$	$f(a)=f(b)$	Rolle中值定理

- 不是任意瞬时速度都是平均速度

$$f(x) = x^3, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

$$\text{不存在 } x_1 < 0 < x_2, \quad \text{s.t.} \quad f'(0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Darboux 定理:

f 在 $[a, b]$ 可导,

$\implies f'$ 可取到 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 之间一切值.

f' 无第一类间断点.

Darboux 定理: 导数值域连通

不妨设 $f'(a) < f'(b)$ (否则 $-f$ 用 f 代替)

$$\forall \gamma \in (f'(a), f'(b))$$

$$\iff 0 \in (F'(a), F'(b)), \quad (F(x) := f(x) - \gamma x)$$

$$\implies F \text{ 最小值在内点 } \xi \text{ 达到}$$

$$\implies \gamma = f'(\xi)$$

证明(续)

令 $G = f'$, x_0 是 G 的第一类间断点 $\xrightarrow{f \text{ 在 } [a,b] \text{ 可导}}$ x_0 是 G 的连续点.

$$\begin{aligned} G(x_0) = f'(x_0) & \xrightarrow{\text{取 } x_n \xrightarrow{>} x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \\ & \xrightarrow{\xi_n \in (x_0, x_n)} \lim_{n \rightarrow \infty} f'(\xi_n) \\ & \xrightarrow{\xi_n \xrightarrow{>} x_0} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) \\ & \xrightarrow{\text{第一类间断}} \lim_{x \rightarrow x_0^+} G(x) \end{aligned}$$

故 G 在 x_0 右连续, 同理左连续.

例题

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}, \quad f \text{ 可导}, \quad f \in C(\mathbb{R}) \setminus C^1(\mathbb{R})$$

- f' 仅有的间断点 $x = 0$ 是第二类间断点.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$$

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0$$

- $f'(0) \neq \lim_{x \rightarrow 0} f'(x).$

导函数可去奇点定理

假设 f 在 $(a - \delta, a + \delta)$ 连续, 在 $(a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ 可导, 则

a 是 f' 的可去间断点 $\iff a$ 是 f' 的连续点

证明

$$\lim_{s \rightarrow a^+} \frac{f(s) - f(a)}{s - a} \quad \frac{\text{任意 } x_n \xrightarrow{>} a}{\xi_n \in (a, x_n)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(\xi_n) \quad (\text{中值定理})$$
$$\frac{\xi_n \xrightarrow{>} a}{\text{可去间断}} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$$

同理:

$$\lim_{s \rightarrow a^-} \frac{f(s) - f(a)}{s - a} = \lim_{x \rightarrow a^-} f'(x)$$

结论: f 在 a 点处可导, 而且 f' 在 a 点处连续.

导数的计算方法(利用中值定理)

$$f \in C(\mathbb{R}), \quad \lim_{x \rightarrow a} f'(x) \text{ 存在有限}$$

$\implies f$ 在 a 点处导数, 而且

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x).$$

Darboux中值定理和导函数可去奇点定理的比较

Darboux中值定理	f 在 a 点处可导	a 是第一类间断点
导函数可去奇点定理	f 在 a 点处连续	a 是可去间断点

注记: 可去奇点定理中, 可去间断点不能弱化为第一类间断点。

反例:

$$f(x) = |x|$$

导数+逐次逼近=高阶逼近=高阶Taylor展开

假设 $f''(x_0)$ 存在.

$$F(x) := \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0 \\ f'(x) & x = x_0 \end{cases}$$

$$F(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

$$F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} F'(x) \xrightarrow{\text{L'Hospital法则}} \frac{f''(x_0)}{2!}.$$

$$\implies f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

这一线性逼近过程可以一直持续下去. 这一过程解释了线性逼近过程的多次使用是如何装配在一起的。

例题

$$f(x) \stackrel{a>b>0}{=} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x} \in C[-\infty, +\infty].$$

$$f'(0) \stackrel{=}{=} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(s) - f(0)}{s}$$

$$\stackrel{\text{中值定理}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \frac{1}{8} \sqrt{ab} \left(\ln \frac{a}{b} \right)^2$$

微积分基本定理的推论, 也是中值定理的推论

- 微积分基本定理

$$C[a, b] \xrightleftharpoons[\frac{d}{dx}]{\int_a^x} C^1[a, b]/\mathbb{R}$$

- 推论

$$f' = 0 \quad \xLeftrightarrow{f \text{ 在 } (a, b) \text{ 可导}} \quad f \equiv c.$$

$$f' = g' \quad \xLeftrightarrow{f, g \text{ 在 } (a, b) \text{ 可导}} \quad f \equiv g + c.$$

$$\text{在非连通开集上} \quad f' = 0 \quad \xLeftrightarrow{f \text{ 可导}} \quad f \text{ 局部是常数}$$

有界区间上, 函数和导数有界性关系

- 在有界区间上:

导函数有界 $\xRightarrow{\text{Lagrange}}$ 函数一致连续

$\implies$ 函数可扩充为闭区间一致连续

$\implies$ 函数有界

函数和导数有界性关系

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0 \xRightarrow{f \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 上可导}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \xRightarrow{f \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 上可导}} \lim_{x \rightarrow +\infty} |f'(x)| = 0.$

- $f' \text{ 在 } +\infty \text{ 附近有界} \xRightarrow{f \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 可导}} \frac{f(x)}{x} \text{ 在 } +\infty \text{ 附近有界}$

- $f' \text{ 在有限区间 } (a, b) \text{ 有界} \xRightarrow{f \text{ 在 } (a, b) \text{ 可导}} f(x) \text{ 在 } (a, b) \text{ 有界}$

函数和导数有界性关系(证明)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0 \xRightarrow{L'Hospital} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

函数和导数有界性关系(证明)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f'(x)| \stackrel{\text{反证法}}{=} A \in (0, +\infty]$$

$$\implies \exists [M, +\infty) : |f'(x)| > \min\{\frac{A}{2}, 1\}$$

$$\begin{aligned} \implies 0 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(x)}{x} \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(M) + f'(\zeta)(x - M)}{x} \right| \geq \min\{\frac{A}{2}, 1\}. \end{aligned}$$

曲线与切线关系最紧密

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\overbrace{f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))}^{\text{切线}}}{\underbrace{f(x)}_{\text{曲线}} - \underbrace{(a + b(x - x_0))}_{\text{割线}}} \stackrel{f'(x_0) \neq 0}{\stackrel{(a,b) \neq (f(x_0), f'(x_0))}{=}} 0$$

故 $\exists \delta > 0$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$, 有

$$\left| f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) \right| < \left| f(x) - (a + b(x - x_0)) \right|$$

曲线和切线距离 < 曲线和割线距离

假设 f 可导, f' 恒不为零, 则

$$(\ln |f(x)|)' = \frac{1}{2} (\ln f(x)^2)' = \frac{1}{2} \frac{2f(x)f'(x)}{f(x)^2} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

第17次作业: [3.4] 7, 8, 9, 10, 11, 12

数学分析(A1), 第18次课

任广斌(中国科大)

2023-10-25

本次课主要内容

核心思想： 利用导数刻画函数(单调凸凹)性质

- 中值定理的Taylor展开解读
- 低阶Taylor展开的应用
 - 单调性： 极值
 - 凸凹性： Jensen不等式 (下次课内容)

学而不思则罔， 思而不学则殆

——孔子

战略解读：分析是极限的艺术如何落到实处？

- 工具： 极限、 导数(各阶)、 积分.
- 手段： 逼近.

0次Taylor多项式	连续	C^0		
1次Taylor多项式	可导	弱 C^1	单调	直线
2次Taylor多项式	光滑	C^2	凸凹	二次曲线

- 落到实处: 以简代繁, 以多项式代替初等函数.
- 具体实施: 初等函数是无穷次多项式
 - Taylor展开是微积分的顶峰
 - 余项估计(Peano余项、Lagrange余项, 积分余项).
 - 余项需要导数和积分表达
- 方法: 仿生学

$\mathbb{R}$: $\mathbb{Q}$ $\xrightarrow[\text{从规则到不规则}]{\text{极限过程}}$ 初等函数 : 多项式

利用导数研究函数：二次Taylor多项式作为函数的近似

	f	f'	f''
	+	+	+
来自序关系	非负	$\nearrow$	凸

注记： 分析中的三种结构=代数结构+拓扑结构+序结构

- 函数的正负部分解

$$f = \frac{|f| + f}{2} - \frac{|f| - f}{2} =: f^+ - f^-.$$

带Peano余项的Taylor展开

- 一阶情形:

$$f'(x_0) \stackrel{f'(x_0) \exists}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

$$\iff f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{Taylor展开}} + \overbrace{o(x - x_0)}^{\text{Peano余项}}$$

带Peano余项的Taylor展开

- 二阶情形:

$$f''(x_0) \quad \quad \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

$$\frac{\text{L'Hospital}}{\text{反向使用}} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{\frac{1}{2!}(x - x_0)^2}$$

$$f(x) \stackrel{f''(x_0) \exists}{=} \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2}_{\text{Taylor展开}} + \overbrace{o((x - x_0)^2)}^{\text{Peano余项}}$$

带Lagrange余项的Taylor展开

- 零阶情形(常数变易法+Cauchy中值定理):

$$\frac{f(x) - f(t)}{x - t} \quad \frac{f \in C[a, b], \text{ 内部可导}}{x \text{ 固定}, t \text{ 变量}} \quad f'(\xi)$$

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \overbrace{f'(\xi)(x - x_0)}^{\text{Lagrange 余项}}}_{\text{Taylor 展开}}$$

带Lagrange余项的Taylor展开

- 一阶情形(常数变易法+Cauchy中值定理):

$$\frac{f(x) - f(t) - f'(t)(x - t)}{\frac{1}{2!}(x - t)^2} \quad \frac{f \in C^1[a, b], \text{ 内部2阶可导}}{x \text{ 固定, } t \text{ 变量}} \quad f''(\xi)$$

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{Taylor展开}} + \overbrace{\frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2}^{\text{Lagrange余项}}.$$

二次Taylor多项式决定函数性质: 单调、凸凹、极值

$$f(x) \stackrel{f'(x_0)\exists}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$$f(x) \stackrel{f''(x_0)\exists}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

$$f(x) \stackrel{f'(\xi)\exists}{=} f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$$

$$f(x) \stackrel{f''(\xi)\exists}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2.$$

Peano 余项和Lagrange 余项比较

以下公式条件依次增强，结论相应增强。

Peano 余项	$o(x - x_0)$	用于研究严格单调
Lagrange 余项	$f'(\xi)(x - x_0)$	单调
Peano 余项	$o((x - x_0)^2)$	严格凸
Lagrange 余项	$\frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2$	凸

单调性几何意义

单调增加 $\iff$ 自变量增加时, 曲线上行

Theorem

$f \in C[a, b]$, 内部可导, 则

- f 在 $[a, b]$ $\nearrow \iff f'|_{(a,b)} \geq 0$
- f 在 $[a, b]$ $\nearrow \iff f'|_{(a,b)} \geq 0$, 不在任何开区间恒为零.

$f'|_{(a,b)} > 0 \xrightarrow{f \in C[a,b]} f \text{ 在 } [a, b] \nearrow, \quad \text{反之不成立}(f(x) = x^3).$

单调导数刻画证明

- 必要性: 导数是差商极限. 充分性: Lagrange 中值定理.
- 必要性: 反证法:

假设 f' 在某开区间恒为零, 则 f 在某开区间恒为常数.

充分性: 反证法:

假设 f 单调增加但是不是严格单调增加, 则

$$\exists x_1 < x_2 : \quad f(x_1) = f(x_2)$$

由于 f 单调增加, 故 f 在 (x_1, x_2) 为常数. 与假设矛盾.

严格单调函数

Theorem

$$f \in C[a, b], \quad f'|_{(a,b)} > 0 \xrightarrow{\text{Lagrange}} f \text{ 在 } [a, b] \nearrow$$

反之不成立: (例子 $f(x) = x^3$)

严格单调增加的函数, 其导数可以有零点, 即切线可以是水平的.

除有限个点外, 导函数严格大于零必严格单调

Theorem

$$f \in C[a, b], \quad \text{除有限个例外 } f' > 0 \xRightarrow{\text{Lagrange}} f \text{ 在 } [a, b] \nearrow$$

证明: f 可以剖分成有限个区间, 在每个区间严格单调.

例子

$$\frac{2}{\pi}x < \sin x < x, \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

证明: $f(x) = \frac{\sin x}{x} \searrow \implies f(\frac{\pi}{2}) < f(x) < f(0), \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2}).$

导数保号性和函数保号性关系

$f \in C[a, b]$, 内部可导, 则

$$f' > 0 \implies \begin{cases} f > 0, & f(a) = 0 \\ f < 0, & f(b) = 0 \end{cases}$$

$$f'' > 0 \text{ on } \mathbb{R} \implies f \text{ 无界}$$

证明: 取 $f'(a) \neq 0$, 考察在 a 点的支撑线:

情形1: $x > a$.

$$(f(x) - f(a) - f'(a)(x - a))' > 0 \implies f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) > 0$$

情形2: $x < a$.

$$(f(x) - f(a) - f'(a)(x - a))' < 0 \implies f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) > 0$$

综上所述, 曲线在支撑线上方. 因为 $f'(a) \neq 0$, 故 f 无界.

极值

极值点	{	单调性改变	两边单调
		导数变号	两边可导

函数在一点性态(导数 > 0 , 取极值) $\Rightarrow$ (单侧)单调性

点态性质 $\Rightarrow$ 局部性质

- 函数在一点导数 $> 0 \Rightarrow$ 单调性

$$f(x) = x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}, \quad f'(0) = 1$$

$f(x) - x$ 位于 $\pm 2x^2$, 在 $x = 0$ 处沿着直线 $y = x$ 震荡.

- 函数极值点 $\Rightarrow$ 单侧单调性

- 非负偶函数, 以 $x = 0$ 为极小值.

$$f(x) = |x| + x \sin \frac{1}{x}, \quad f'\left(\frac{1}{n\pi}\right) = 1 - (-1)^n n\pi$$

- 非负函数, 位于 $3x^2$ 与 x^2 之间, 以 $x = 0$ 为极小值.

$$f(x) = x^2 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right)$$

极值充分条件

$f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0 \implies x_0$ 是 f 严格极小值点

- 导数变号:

$f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0 \implies$ 导数在 x_0 处变号, 典型例子 $f(x) = x^2$.

- 函数图形与典型例子差不多相同

$$f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0 \implies f(x) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2).$$

极值必要条件

x_0 是 f 的极小值点, $f''(x_0)$ 存在 $\implies f''(x_0) \geq 0$

证明: 否则, $f''(x_0) < 0 \implies x_0$ 是 f 的严格极大值点

最大值和最小值

假设 $f \in C[a, b]$, $A = \left\{ \text{区间端点, 驻点, 不可导点} \right\}$ 是有限集合, 则

$$\max_{x \in [a, b]} f(x) = \max_{x \in A} f(x).$$

最大值点判别法

假设 $f \in C[a, b]$, x_0 是 f 在内部 (a, b) 上唯一极值点, 则
 x_0 是 f 在 $[a, b]$ 上最值点.

反证法: 假设 x_0 是极大值点, 不是最大值点 (另一情形类似).

令 c 是 f 在 $[a, b]$ 上最大值点, 则 $x_0 \neq c$. 不妨设 $x_0 < c$.

- 情形1: $[x_0, c]$ 端点不是 f 在 $[x_0, c]$ 最小值点

$\implies f$ 在 $[x_0, c]$ 上最小值点在 (x_0, c) 达到, 与极值点唯一矛盾.

- 情形2: $[x_0, c]$ 端点之一是 f 在 $[x_0, c]$ 最小值点

$\implies f$ 在某区间为常数, 与极值点唯一矛盾.

例题

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\alpha} \begin{cases} \searrow e, & \text{当 } \alpha \geq \frac{1}{2}, \quad x > 0 \\ \nearrow e, & \text{当 } \alpha < \frac{1}{2}, \quad x \gg 1. \end{cases}$$

对数求导法: 幂函数降阶

$$f'(x) = f(x)u(x), \quad u(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{x + \alpha}{x(x + 1)} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty).$$

$$u'(x) = \frac{(2\alpha - 1)x + \alpha}{x^2(1 + x)^2} \begin{cases} > 0, & \text{当 } \alpha \geq \frac{1}{2}, \quad x > 0 \\ < 0, & \text{当 } \alpha < \frac{1}{2}, \quad x > \frac{\alpha}{1 - 2\alpha}. \end{cases}$$

$$u \nearrow \xrightarrow{u(+\infty)=0} u < 0 \implies f' < 0 \implies f \searrow$$

最小二乘法(Legendre): 赋予误差的平方和为最小

- 采样数据: $x_1, x_2, \dots, x_n$. 平均 $\left\{ \begin{array}{l} \text{算术平均} \\ \text{几何平均} \\ \text{调和平均} \\ \text{中位数} \end{array} \right.$

- 最小平方法: 与样本点误差的平方和取最小值

$$\sum_{i=1}^n (x - x_i)^2 \text{ 的最小值点 } \underline{\underline{\text{求解最小值}}} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

注记: 平方和的推广是 L^2 范数, 在物理上表示能量.

第18次作业: [3.5] 2(偶), 3(偶), 5, 7, 15

数学分析(A1), 第19次课

任广斌(中国科大)

2023-10-30

本次课主要内容

- 凸函数

- 仿生学:

$\mathbb{R} : \mathbb{Q} \longlongequal{\quad\quad\quad} \text{初等函数} : \text{多项式}$

- 无穷次多项式提供了初等函数的逐次逼近.
 - 利用一次多项式代替初等函数, 决定单调性.
 - 利用二次多项式代替初等函数, 决定凸凹性.

- 数学之美体现在其内在的高度相似性。
- 数学的进步在于挖掘其相似性。

凸函数典型例子

$$f(x) = x^2 \quad (\text{严格凸})$$

$$f(x) = |x| \quad (\text{凸})$$

凸函数高维推广：次调和

$n = 1$	$n > 1$
线性函数 $f'' = 0$	调和函数 $\Delta f = 0$
凸函数 $f'' \geq 0$	次调和函数 $\Delta f \geq 0$
凸分析	次调和和分析(位势理论)

凸函数定义

- 凸函数: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, 区间 $I \subset \mathbb{R}$.

f 凸 $\iff$ f 图形上方几何凸

$\iff$ 割线在曲线上方

$$\iff f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \\ \forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 \neq x_2, \quad \forall t \in (0, 1)$$

- f 严格凸 $\iff$ “ $<$ ”.

- f 凹 $\iff -f$ 凸.

凸性三点判别法

$$f : I \longleftrightarrow \mathbb{R} \text{凸}$$

$$\iff \forall x_1 < x_2 < x_3, x_i \in I :$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

(中间来自合分比不等式).

$$(\text{严格凸} \iff "<")$$

三点刻画几何意义

- 三点割线刻画 $\Longleftrightarrow$ 斜率单调增加:

P_1, P_2, P_3 的横坐标单调增加 $\Longrightarrow$ 割线斜率 $k_{P_1P_2} \leq k_{P_1P_3} \leq k_{P_2P_3}$

三点刻画几何意义(续)

- 三点割线刻画的三个不等式相互等价于三角形面积非负:

$$0 \leq 2S_{\Delta P_1 P_2 P_3} \text{有向面积} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ f(x_2) - f(x_1) & f(x_3) - f(x_1) \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & x_3 - x_2 \\ f(x_1) - f(x_2) & f(x_3) - f(x_2) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ f(x_1) - f(x_3) & f(x_2) - f(x_3) \end{vmatrix}$$

三点刻画证明

$$f \text{凸} \iff x_1 < x_2 < x_3 : \quad x_2 = (1-t)x_1 + tx_3 :$$

$$f(x_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_3)$$

$$= \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3)$$

(此为三点刻画最左边 $\leq$ 最右边.)

凸性四点判别法

$$f: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ 凸}$$

$$\iff I \text{ 上 } \forall \text{ 四点 } : s < t \leq u < v :$$

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u}$$

$$(\text{严格凸} \iff "<")$$

凸函数的最大值原理

非常值凸函数在内点取不到最大值

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ 凸, 在内点取到最大值 $\implies f$ 为常值

证法一: 若 f 不是常数, 则最大值点是割线斜率符号变化的点.

这与割线斜率单调增加矛盾.

证法二: 假设 $x_0 \in (a, b)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的最大值点.

任取 $[c, d]$: $x_0 \in (c, d) \subset [c, d] \subset (a, b)$

$$\implies x_0 = tc + (1 - t)d, \quad t = \frac{d - x_0}{d - c} \in (0, 1).$$

$$\implies M = f(x_0) = f((1 - t)c + td)$$

$$\leq (1 - t)f(c) + tf(d) \leq (1 - t)M + tM = M$$

$$\implies f(c) = f(d) = M, \quad f \equiv M$$

- 右导数 $f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$

- 左导数 $f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$

- 导数右极限 $f'(x_0+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x).$

- 导数左极限 $f'(x_0-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x).$

支撑线判别法

$$f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R} \text{凸}$$

$$\xLeftrightarrow{\text{支撑线判别法}} \forall x_0 \in (a, b), \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\} :$$

$$f(x) \geq f(x_0) + \alpha(x - x_0)$$

(几何意义：曲线在 $(x_0, f(x_0))$ 处存在支撑线)

(注记：严格凸 $\iff$ “ $>$ ”)

支撑线判别法的证明

四点判别法说明割线斜率单调增加, 其极限过程导出左右极限存在有限,

左导数 $\leq$ 右导数.

$$\forall \alpha \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$$

$\longleftrightarrow$
三线判别法

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \alpha \leq \frac{f(u) - f(x_0)}{u - x_0}, \quad \forall x < x_0 < u$$

$\longleftrightarrow$
支撑线方程

$$\begin{cases} f(x) \geq f(x_0) + \alpha(x - x_0), & \forall x < x_0 \\ f(u) \geq f(x_0) + \alpha(u - x_0), & \forall u > x_0 \end{cases}$$

切线判别法

$$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \text{凸} \xLeftrightarrow[f \in C^1(a, b)]^{\text{切线判别法}} \forall x_0 \in (a, b), \forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\} :$$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

(曲线位于切线上方)

(注记: 严格凸 $\iff$ “ $>$ ”)

闭区间上凸函数的刚性

- 闭区间上凸函数的刚性:

闭区间上凸函数, 增加端点处的值保凸.

闭区间上凸函数的有界性

- 闭区间上凸函数的有界性:

闭区间上函数凸 $\implies$ 支撑线 $\leq \text{Graph } f \leq$ 割线

$\implies$ 函数有界

开区间上凸函数必连续

证明1

开区间上凸函数 $\xRightarrow{\text{四点法则}}$ 差商局部有界

$\implies$ 局部Lipschitz, 从而连续.

开区间上凸函数 $\xRightarrow{\text{四点法则}}$ 左右导数存在且有限

$\implies$ 左右连续, 从而连续.

f 可扩充为 $[a, b]$ 连续凸 $\iff f$ 在有界开区间 (a, b) 上有界凸.

充分性: $x_0 := \frac{a+b}{2}$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow b^-} \left(f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \right) \\ &= f(x_0) + A(b - x_0)\end{aligned}$$

差商局部单调有界.

$$x \rightarrow b^-, \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \nearrow \leq \frac{M - f(x_0)}{\frac{b-a}{4}}.$$

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 凸, 则

- 左右导数 $f'_{\pm}$ 存在且有限 ↗

$$\forall x < y \implies f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq f'_-(y) \leq f'_+(y)$$

(严格凸 $\implies$ 中间 $<$ 成立)

- 若右导数左连续或左导数右连续, 则 f 可导.

(1) 割线判别准则

(2) $g := f'_+ = f$ 的右导数,

$$g \text{ 左连续: } g(x) = \lim_{u \rightarrow x^-} g(u)$$

$$f'_+(x) = \lim_{u \rightarrow x^-} f'_+(u) \leq f'_-(x) \leq f'_+(x)$$

假设 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ 是可导函数, 则

$$f \text{ 凸} \iff f' \nearrow \iff f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\forall x_0 \in \overset{\circ}{I}, \forall x \in I \setminus \{x_0\}.$$

$$(\text{严格凸} \iff \nearrow \iff ">")$$

证明: 最左 $\xRightarrow{\text{四点刻画}}$ 中间 $\xRightarrow[\text{切线判别法}]{\text{Lagrange}}$ 最右 $\xRightarrow{\text{切线判别法}}$ 最左

C^1 情形:

$$\text{支撑线} \xleftrightarrow[\text{切线判别法}]{\alpha \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)] = \{f'(x_0)\}} \text{切线}$$

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ 二次可导, 则

$$(1) \quad f \text{凸} \iff f'' \geq 0$$

$$(2) \quad f \text{严格凸} \iff f \text{凸}, \text{ Graph } f \text{不含直线段}$$

$$(1) f'' \geq 0 \implies f' \nearrow \xRightarrow{\text{Lagrange}} \text{割线斜率} \nearrow \implies \text{凸}$$

(2) 充分性：反证法，假设割线上除去端点外，还有曲线上点，则三个点构成的两个割线斜率相等，其它点和这三个点构成的割线斜率的单调性导出曲线局部和割线重合。

凸凹性与坐标系选取有关

单位圆盘上半圆周为凹, 下半圆周为凸.

作业

第19次作业: [3.5] 17, 18(偶), 21, 22, 23.

数学分析(A1), 第20次课

任广斌(中国科大)

2023-11-1

本次课主要内容

- 单调函数、凸函数的上下左右导数刻画.
- 凸函数Jensen不等式
- 曲线的密切直线和密切圆周

凸函数定义

- 凸函数: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, 区间 $I \subset \mathbb{R}$.

f 凸 $\iff$ f 图形上方几何凸

$$\iff f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad \forall t \in [0, 1]$$

(割线在曲线上方)

开区间上凸函数的弱条件: 中点凸性

$$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \text{凸}$$

$$\iff f \in C(a, b), \quad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \quad \forall x_1, x_2 \in (a, b).$$

开区间上凸函数的弱条件证明

反证法: $\exists$ 连接 $(a_1, f(a_1)), (a_2, f(a_2))$ 的割线 $h(x)$. 不妨设 $a_1 < a_2$.

$\exists x_0 \in (a_1, a_2)$:

$$h(x_0) < f(x_0).$$

$$g := f - h \in C[a_1, a_2]$$

取 $\implies x_1, x_2 \in [a_1, a_2], x_1 < x_0 < x_2$: $g(x_1) = g(x_2) = 0, \quad g|_{(x_1, x_2)} > 0$

$$\implies f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > h\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{h(x_1) + h(x_2)}{2} = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

凸函数左右可导性

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 凸, 则

- 左右导数单调增加:

$$\forall x < y \implies -\infty < f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq f'_-(y) \leq f'_+(y) < \infty$$

(严格凸 $\implies$ 中间的严格不等式成立.)

- 若右导数左连续, 或左导数右连续, 则函数可导.

单调性和凸性的左右上下导数刻画

单调 $\xLeftrightarrow{\text{在连续假设下}}$ 右上导数非负;

凸 $\xLeftrightarrow{\text{在连续假设下}}$ 左右导数单调增加.

单调性的右上导数刻画

$$f \nearrow \xLeftrightarrow{f \in C(a,b)} f \text{ 右上导数} \in [0, +\infty]$$

单调性的右上导数刻画续

必要性: $f \nearrow \implies \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$

单调性的右上导数刻画(续)

充分性: $\forall [c, d] \subset (a, b)$, 要证 $f(d) \geq f(c)$.

$$g(x) := f(x) - f(c) - \frac{f(d) - f(c)}{d - c}(x - c)$$

$$g(c) = g(d) = 0, \quad g \text{ 在 } [c, d] \text{ 最大值点 } x_0 \in [c, d]$$

$$\begin{aligned} \forall x > x_0 &\implies 0 \geq \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{f(d) - f(c)}{d - c} \\ &\implies f(d) \geq f(c) \end{aligned}$$

涉及两点技巧: 将两点放到实轴上

方法: 曲线-割线

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ 凸, 区间 $I \subset \mathbb{R}$

$$\implies f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

$$\forall x_i \in I, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1.$$

(严格凸 $\iff$ “ $<$ ” 除非 $x_1 = \cdots = x_n$.)

Jensen不等式证明

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = (1 - \lambda_n) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_n} x_i + \lambda_n x_n, \quad \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_n} = 1$$

$$\xRightarrow{\text{归设}} f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leqslant (1 - \lambda_n) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_n} f(x_i) + \lambda_n f(x_n).$$

几何-算术-调和平均不等式

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}, \quad \forall x_i > 0$$

$$(\text{等} \iff x_1 = \cdots = x_n.)$$

几何-算术-调和平均不等式

证明: $-\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 严格凸, 利用Jensen不等式:

$$-\ln \frac{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n} \leq \frac{1}{n} \left(-\ln \frac{1}{x_1} - \cdots - \ln \frac{1}{x_n} \right) \leq \ln \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

最后的不等式利用了 $\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 严格凹.

例题

$$f_n(x) = (\lambda_1 a_1^x + \cdots + \lambda_n a_n^x)^{\frac{1}{x}}, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \quad \lambda_i > 0, \quad a_i > 0$$

$$f_n(x) = \begin{cases} \max\{a_1, \cdots, a_n\}, & \text{最大值,} & x = +\infty \\ \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n, & \text{加权算术平均,} & x = 1 \\ a_1^{\lambda_1} \cdots a_n^{\lambda_n}, & \text{加权几何平均,} & x = 0 \\ \left(\lambda_1 a_1^{-1} + \cdots + \lambda_n a_n^{-1} \right)^{-1}, & \text{加权调和平均,} & x = -1 \\ \min\{a_1, \cdots, a_n\}, & \text{最小值,} & x = -\infty \end{cases}$$

$$f_n(x) = (\lambda_1 a_1^x + \cdots + \lambda_n a_n^x)^{\frac{1}{x}} \in C[-\infty, +\infty].$$

$$f(x) = \begin{cases} \text{常数,} & a_1 = a_2 = \cdots = a_n \\ \text{严格单调增加} & \text{其它} \end{cases}$$

加权几何平均 $\leq$ 加权算术平均

$$a, b, p, q \geq 0, \quad p + q = 1 \implies a^p b^q \leq pa + qb.$$

$$\text{等} \iff a = b$$

$$\text{特例 } p = q = \frac{1}{2} \implies \sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2}$$

注记：乘除法转化为加减法.

- 不妨设 $x > 0$.

$$s < t < 0 \implies (\lambda_1 a_1^s + \cdots + \lambda_n a_n^s)^{\frac{1}{s}} \leq (\lambda_1 a_1^t + \cdots + \lambda_n a_n^t)^{\frac{1}{t}}$$

令 $u = -s, \quad v = -t, \quad u > v > 0, \quad b_i = \frac{1}{a_i},$ 上式改写为

$$u > v > 0 \implies \frac{1}{(\lambda_1 b_1^u + \cdots + \lambda_n b_n^u)^{\frac{1}{u}}} \leq \frac{1}{(\lambda_1 b_1^v + \cdots + \lambda_n b_n^v)^{\frac{1}{v}}}$$

证明

- 不妨设 $x \geq 1$, 而且只要证明 $x > 1 \implies f(x) > f(1)$.

$$u > v > 0 \implies (\lambda_1 b_1^u + \cdots + \lambda_n b_n^u)^{\frac{1}{u}} \geq (\lambda_1 b_1^v + \cdots + \lambda_n b_n^v)^{\frac{1}{v}}$$

$$\text{令 } x = \frac{u}{v}, \quad a_i = b_i^v, \quad \text{上式改写为}$$

$$x > 1 \implies (\lambda_1 a_1^x + \cdots + \lambda_n a_n^x)^{\frac{1}{x}} > \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$$

- 下面证明: $x > 1 \implies f(x) > f(1)$

$$f(x) > f(1) \iff (\lambda_1 a_1^x + \cdots + \lambda_n a_n^x)^{\frac{1}{x}} \geq \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$$

$$\iff \lambda_1 a_1^x + \cdots + \lambda_n a_n^x \geq (\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n)^x$$

$g(u) = u^x$ 是严格凸函数, 其中 $x > 1, u \in (0, +\infty)$.

上式是 g 的 Jensen 不等式

Bellman不等式

在 $[a, b]$ 上: $|\lambda(x)|$ 具有正下界, f 有界, g 可导,

$$D := \lambda(x) \frac{d}{dx} + f(x) \quad (1\text{阶微分算子}).$$

则

$$\begin{cases} |Dg(x)| \leq |g(x)|, & \forall x \in [a, b] \\ g(a) = 0 \end{cases}$$

$$\implies g \equiv 0$$

- 初值问题存在唯一解:

$$\begin{cases} \left(\lambda(x) \frac{d}{dx} + f(x) \right) g(x) = 0, & \forall x \in [a, b] \\ g(a) = 0 \end{cases}$$

$$\implies g \equiv 0$$

Bellman不等式特例

- 初值问题存在唯一 C^1 解:

假设 $f \in C[a, b]$, $g \in C^1[a, b]$. 则

$$\begin{cases} g'(x) + f(x)g(x) = 0, & \forall x \in [a, b] \\ g(a) = 0 \end{cases}$$

$$\implies g \equiv 0$$

Bellman不等式的证明

反证法: $\exists d \in (a, b): g(d) \neq 0$. 取 $[a, d]$ 中 g 的零点的最大值:

$$c := \max\{x \in [a, d] : g(x) = 0\}$$

$$\implies c < d, \quad g|_{(c,d)} \text{ 没有零点, } g(c) = 0.$$

$$\xRightarrow{h(x) := \ln |g(x)|} |f(x) + \lambda(x)h'(x)| \leq 1, \quad \forall x \in (c, d)$$

$$\implies h'(x) \text{ 在 } (c, d) \text{ 有界}$$

$$\implies h(x) \text{ 在有界区间 } (c, d) \text{ 有界, 与 } h(c) = \infty \text{ 矛盾.}$$

- 实数表示为十进制小数

$$a = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots = a_0.a_1a_2a_3\cdots$$

若 $a_{n_0} \neq 0$, 则
$$\underbrace{0.0\cdots 0a_{n_0}}_{n_0+1} > \underbrace{0.0\cdots 0}_{n_0+1} a_{n_0+1} a_{n_0+1} \cdots$$

- 函数表示为Taylor级数

$$f(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \cdots = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots$$

若 $c_{n_0} \neq 0$, 则 $|c_{n_0}(x-x_0)^{n_0}| >$ 其后的各项绝对值之和.

曲线与切线关系最紧密

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\overbrace{f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))}^{\text{切线}}}{\underbrace{f(x)}_{\text{曲线}} - \underbrace{(a + b(x - x_0))}_{\text{割线}}} \stackrel{f'(x_0) \exists}{\stackrel{(a,b) \neq (f(x_0), f'(x_0))}{=}} 0$$

故 $\exists \delta > 0$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$, 有

$$\left| f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) \right| < \left| f(x) - (a + b(x - x_0)) \right|$$

曲线和切线距离 < 曲线和割线距离

- 曲线 $y = f(x)$, 曲率圆 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.
- 曲线与曲率圆在交点 (x_0, y_0) 具有相同的2阶Taylor多项式.

$$y_0 = f(x_0), \quad y'_0 = f'(x_0), \quad y''_0 = f''(x_0).$$

- 曲率 $= \frac{1}{R} = \frac{|y''_0|}{(1 + (y'_0)^2)^{\frac{3}{2}}}.$

- 曲率圆方程

$$\begin{cases} (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = R^2 \\ (x_0 - a) + (y_0 - b)y'_0 = 0 \\ 1 + (y'_0)^2 + (y_0 - b)y''_0 = 0 \end{cases}$$

曲率圆求解

- 曲率圆

$$\begin{cases} y_0 - b = -\frac{1 + (y'_0)^2}{y''_0} \\ x_0 - a = \frac{1 + (y'_0)^2}{y''_0} y'_0 \\ \frac{1}{R} = \frac{|y''_0|}{(1 + (y'_0)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

由此解出 a, b, R .

曲率圆与二次Taylor多项式关系

- $f(x)$ 在 (x_0, y_0) 的曲率圆方程 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

- 不妨设 (x_0, y_0) 位于曲率圆的上半圆周, 即 $y_0 > b$.

(若 $y_0 = b$, 则在 (x_0, y_0) 处的切线垂直, $f'(x_0) = \infty$ 矛盾)

- 此时曲率圆在 (x_0, y_0) 附近的方程为

$$\begin{aligned} y &= b + \sqrt{R^2 - (x - a)^2} \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) \end{aligned}$$

- 曲率圆是曲线精确到二阶的逼近

- $f(x) = x^2$ 在 origin 处曲率圆

$$f'(0) = 0, \quad f''(0) = 2, \quad \frac{1}{R} = 2$$

曲率圆方程: $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2^2}$

- $f(x) = x^2$ 在 origin 处 Taylor 展开就是它自己 (Taylor 展开唯一性)

第20次作业: [3.5] 问题 4, 5, 7.

数学分析(A1), 第21次课

任广斌(中国科大)

2023-11-3

本次课主要内容

- L'Hospital法则(§6)

Stolz定理

Theorem ($\frac{\infty}{\infty}$ 型Stolz定理)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} \quad \frac{x_n \nearrow +\infty}{\text{右端} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}.$$

Theorem ($\frac{0}{0}$ 型Stolz定理)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} \quad \frac{x_n, y_n \rightarrow 0, \quad x_n \searrow 0}{\text{右端} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}.$$

数列型离散L'Hospital法则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} \quad \text{=====} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}.$$

- 不定型：下列之一成立

- $\frac{0}{0}$ 型 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$

- $\frac{\infty}{\infty}$ 型. $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty.$

- 右端极限存在 $\in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

- 严格单调性(保证分母非零): b_n 严格单调.

Stolz定理

Theorem ($\frac{\infty}{\infty}$ 型 Stolz 定理)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \frac{\substack{f, g \text{ 局部有界, } g \nearrow +\infty \\ \text{右端} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{g(x+1) - g(x)}}.$$

Theorem ($\frac{0}{0}$ 型 Stolz 定理)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \frac{\substack{f \rightarrow 0, g \searrow 0 \\ \text{右端} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{g(x+1) - g(x)}}.$$

函数型离散L'Hospital法则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{=====} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{g(x+1) - g(x)}.$$

- 不定型：下列之一成立

- $\frac{0}{0}$ 型 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

- $\frac{\infty}{\infty}$ 型. $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$. f, g 局部有界

- 右端极限存在 $\in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

- 严格单调性(保证分母非零): g 严格单调.

L'Hospital法则

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

- 不定型：下列之一成立

- $\frac{0}{0}$ 型 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

- $\frac{\infty}{\infty}$ 型. $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty.$

- 右端极限存在 $\in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$

- 推广的严格单调性(保证分母非零): g' 恒不为零.

- 可导性: f, g 在 (a, b) 可导, $a, b \in [-\infty, +\infty]$.

L'Hospital法则

注记: 在 b 点处类似结果成立.

L'Hospital法则的 $\frac{0}{0}$ 型证明

- $\frac{0}{0}$ 型

$$A := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(i) $a \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \xrightarrow[\xi \in (a, x)]{\text{Cauchy中值}} \lim_{\xi \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = A.$$

L'Hospital法则的 $\frac{0}{0}$ 型证明

(ii) $a = -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\substack{x = \frac{1}{t} \\ \text{变量代换}}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})}{g'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(iii) $a = +\infty$.

变量代换 $x = -t$ 归结于(ii).

L'Hospital法则的 $\frac{\infty}{\infty}$ 型证明

• $\frac{\infty}{\infty}$ 型 (i) $a \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}: A := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 当 } x \in (a, a + \delta], \text{ 有 } \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \epsilon.$$

$$\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(c)}{g(c)}}{1 - \frac{g(c)}{g(x)}} = \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} \stackrel{\substack{\text{在 } [x, c] \text{ Cauchy} \\ \xi \in (x, c), c = a + \delta}}{=} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in (A - \epsilon, A + \epsilon).$$

$$\xRightarrow{\frac{\infty}{\infty} \text{型}} A - \epsilon \leq \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq A + \epsilon.$$

注记: 一般情形 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} - \epsilon \leq \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} + \epsilon$

L'Hospital法则的 $\frac{\infty}{\infty}$ 型证明(续1)

(ii) $a \in \mathbb{R}$, $A = +\infty$

不妨设 $g' > 0$ (Darboux介值定理) $\xrightarrow{g \nearrow} \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = -\infty$.

$$A = +\infty \implies \exists(a, c]: \frac{f'(x)}{g'(x)} > 1 \quad \text{即 } f' > g'$$

$$\xrightarrow{f-g \uparrow} f(x) \leq g(x) + f(c) - g(c), \quad \forall x \in (a, c]$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \xrightarrow[A = \infty \text{ 转化为 } A = 0]{\text{倒数变换}} \text{结论成立}$$

L'Hospital法则的 $\frac{\infty}{\infty}$ 型证明(续2)

(iii) $a \in \mathbb{R}, \quad A = \infty$

由假设极限为无穷, 故在 a 点附近 $\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} \right| \geq 1$.

由Darboux导数值域连通定理, f' 和 g' 不变号, 从而结论成立:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty \text{ 或 } -\infty.$$

(iv) 其它情形类似.

L'Hospital法则与Stolz定理不同之处

- L'Hospital法则与Stolz定理表面上不同之处:

右端极限可以 $=\infty$.

- L'Hospital法则与Stolz定理本质相同

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty \text{ 或 } -\infty.$$

L'Hospital法则条件缺一不可

- 非不定性:

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x+1} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x'}{(x+1)'} = 1.$$

L'Hospital法则条件缺一不可

- 右端极限不存在:

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 \sin \frac{1}{x})'}{x'} \quad (\nexists).$$

L'Hospital法则(极限不存在版本)

Theorem (L'Hospital)

在右端极限存在性不明的情形下, 结论减弱为

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

由Taylor展开看 $\frac{0}{0}$ 型L'Hospital法则

- 设 $f, g \in C^1(c, d)$, $a \in (c, d)$,

$f(a) = g(a) = 0$, g' 恒不为零, 最右端极限存在. 则

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)}{g(a) + g'(a)(x-a) + o(x-a)} \\ &= \frac{f'(a)}{g'(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.\end{aligned}$$

- 初等函数极限 $\xrightarrow{\text{Taylor展开}}$ 有理函数极限

- 无穷大的阶 ↗:

$$\ln x, \quad x^\alpha (\alpha > 0), \quad e^x, \quad x^x, \quad e^{e^x}, \dots \quad x \rightarrow +\infty$$

计算 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} \quad \underline{\underline{L'Hospital}} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = 0.$$

极限统一为无穷大续

计算 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} \xrightarrow[\text{可设 } \alpha \in \mathbb{N}]{L'Hospital} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{e^x} \xrightarrow[\text{继续这一过程降阶}]{L'Hospital} 0$$

计算

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^x} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x(1-\ln x)} = 0.$$

不定型的标准化

- 不定型可化为标准型 $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty^0, \quad 0^0, \quad 1^\infty.$$

- 初等函数极限: 涉及有限次加减乘除复合运算的极限。
 - 连续函数的极限
 - 不定型。

例题

计算 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\mu \ln x \quad (\mu > 0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\mu \ln x \stackrel{\substack{0 \cdot \infty \\ \mu > 0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\mu}} \stackrel{\substack{\frac{\infty}{\infty} \\ L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\mu x^{-\mu-1}} = 0$$

例题

计算 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x) \stackrel{\infty - \infty}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{L'Hospital}{=}} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0$$

例题

计算 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\arctan x - \frac{\pi}{2}}$

$$I := \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\arctan x - \frac{\pi}{2}} \xrightarrow{\infty^0} \ln I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$f \in C(\mathbb{R}), \quad \alpha \neq 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha f(x) + xf'(x)) = \beta$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\beta}{\alpha}$$

证明: 利用凑微分技巧:

$$u(x)(f'(x) + f(x)g'(x)) \xrightarrow{u(x)=e^{g(x)}} (u(x)f(x))'$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha f(x) + x f'(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^\alpha f(x))'}{x^{\alpha-1}} \xrightarrow[\text{反向使用}]{L'Hospital} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha f(x)}{\frac{1}{\alpha} x^\alpha}$$

$$f, u \in C^1(a, +\infty), u' \text{ 恒不为零}, \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) + \frac{u(x)}{u'(x)} f'(x) \right) := \lambda \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lambda.$$

凑微分技巧的应用续

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{u(x)f(x)}{u(x)}$$

$$\xrightarrow{\underline{\underline{L'Hospital}}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(u(x)f(x))'}{u'(x)}$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + \frac{u(x)}{u'(x)} f'(x)) = \lambda$$

例题

$$f(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x^\beta}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

$f \in C^1[0, 1]$	$\alpha > \beta + 1$
f 在 $[0, 1]$ Lipschitz	$\alpha \geq \beta + 1$

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x^\beta} - \beta x^{\alpha-\beta-1} \cos \frac{1}{x^\beta}, \quad x \neq 0.$$

$$f \in C^1[0, 1] \iff \begin{cases} \alpha > 1 \\ \alpha > \beta + 1 \end{cases}$$

$$\alpha \geq \beta + 1 \implies f' \text{ 有界} \xrightarrow{\text{Lagrange}} f \text{ Lipschitz}$$

$$\alpha < \beta + 1 \implies \overline{\lim}_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$$

$$\xrightarrow{\text{反证法}} f \text{ 非Lipschitz}$$

$$f(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x^\beta}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

$f \in C^1[0, 1]$	$\alpha > \beta + 1$
f 在 $[0, 1]$ Lipschitz	$\alpha \geq \beta + 1$

- 例如 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ 在 $[0, 1]$ 连续、非Lipschitz

假设 $f \in C[a, b]$, f 在 (a, b) 可导. 则

$$\liminf_{x \rightarrow a} f'(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \limsup_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \limsup_{x \rightarrow a} f'(x).$$

- 严格不等号可能取到. (例如 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$).

第21次作业: [3.6] 1(奇), 2, 4, 5

数学分析(A1), 第22次课

任广斌(中国科大)

2023-11-6

本次课主要内容

- 函数作图

驻点, 极值点, 拐点

- 驻点: x_0 是 f 的驻点 $\xLeftrightarrow{x_0 \text{ 附近 } f \text{ 可导}} f'(x_0) = 0$.
- 极值点: x_0 是 f 的极值点 $\xLeftrightarrow{x_0 \text{ 附近 } f \text{ 可导}} f$ 单调的转折点.

反之不成立: $f(x) = x^2(2 + \sin \frac{1}{x})$.

- 拐点:

x_0 是 f 的拐点 $\xLeftrightarrow{\quad} f$ 严格凸凹转折点

$\xLeftrightarrow{x_0 \text{ 附近 } f \text{ 可导}} f'$ 严格单调转折点

$\xLeftrightarrow{x_0 \text{ 附近 } f \text{ 2阶可导}} f''$ 在 x_0 变号, $f''(x_0) = 0$

驻点, 极值点, 拐点(续)

$f'(x_0) = 0$	$f''(x_0) = 0$
可能极值点	可能拐点

单调转折点	$\implies$	极值点
严格凸凹转折点	$\iff$	拐点

右拐 $\xleftarrow{\text{通过拐点}} \xrightarrow{\text{左拐}}$

在拐点处, 曲线与切线相互交叉, 切线是曲线的单边支撑线.

- $f(x) = x^3$. $x = 0$ 是拐点
- $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$. $x = 0$ 是拐点, 不可导点.
- $f(x) = x^4$ 凸. $x = 0$ 非拐点, 可疑拐点, $f''(0) = 0$

渐近线

- 水平渐近线:

$$f(x) \text{ 的水平渐近线 } y = a \iff \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} f(x) = a$$

- 垂直渐近线:

$$f(x) \text{ 的垂直渐近线 } x = a \iff \lim_{\substack{x \rightarrow a^+ \\ (x \rightarrow a^-)}} f(x) = \infty$$

- 斜渐近线:

$$f(x) \text{ 的斜渐近线 } y = ax + b \iff \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

斜渐近线的确定

- 斜渐近线:

$$f(x) \text{ 的斜渐近线 } y = ax + b \iff \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{f(x) - (ax + b)}{x} = 0$$

$$\implies a = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} (f(x) - ax).$$

作图步骤

- 定义域
- 周期, 奇偶, 对称.
- 单调, 凸凹
- 渐近线
- 特殊点:

驻点, 极值点, 拐点, 端点, 不可导点, 与坐标轴交点.

例题

$$f(x) = \frac{-1}{x-1} + (-1) + \left(-\frac{1}{4}\right)(x-1) = -\frac{(x+1)^2}{4(x-1)}.$$

- 定义域: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- 渐近线:
 - 垂直渐近线: $x = 1$
 - 斜渐近线: $y = -\frac{1}{4}(x+3)$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} &= -\frac{1}{4} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(f(x) - \left(-\frac{1}{4}x\right)\right) &= -\frac{3}{4}\end{aligned}$$

- 单调, 凸凹:

$$f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{4} = -\frac{(x+1)(x-3)}{4(x-1)^2}, \quad f''(x) = \frac{-2}{(x-1)^3}$$

- 特殊点:

- 与坐标轴交点 $(-1, 0)$, $(0, \frac{1}{4})$.
- 驻点: $x = -1, 3$
- 极小值点: $(-1, 0)$. 极大值点: $(3, -2)$

$$f'(x) = -\frac{(x+1)(x-3)}{4(x-1)^2}, \quad f''(x) = \frac{-2}{(x-1)^3}$$

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 3)$	$(3, +\infty)$
f'	-	+	+	-
f''	+	+	-	-
f	$\searrow$ 凸	$\nearrow$ 凸	$\nearrow$ 凹	$\searrow$ 凹
图形				

将各种信息汇聚到一起绘制草图。

- Taylor多项式:

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

- $f(x)$ 和 $T_n(x)$ 在 x_0 处直到 n 阶导数相同:

$$T_n(x_0) = f(x_0),$$

$$T'_n(x_0) = f'(x_0),$$

...

$$T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Theorem (带有Peano余项的Taylor展开)

$$f(x) \stackrel{f^{(n)}(x_0) \exists}{=} \underbrace{T_n(x)}_{\text{Taylor多项式}} + \underbrace{o((x-x_0)^n)}_{\text{Peano余项}}$$

Taylor多项式(续1)

证明1: $R(x) := f(x) - T_n(x)$

$$R(x_0) = 0, \quad R'(x_0) = 0, \quad \dots, \quad R^{(n)}(x_0) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^n} \xrightarrow{\text{n-1次L'Hospital}} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)}$$

$$\xrightarrow{\text{泰勒展开}} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x - x_0)}{n!(x - x_0)}$$

$$\xrightarrow{\text{泰勒展开}} \frac{1}{n!} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} - f^{(n)}(x_0) \right)$$

导数定义

0

Taylor多项式(续2)

证明2: $f^{(n)}(x_0) \exists$

$$f^{(n)}(x_0) \quad \underline{\underline{\quad \quad \quad}} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}$$

$$\underline{\underline{\quad \quad \quad}} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - T_{n-1}(x))^{(n-1)}}{\left(\frac{1}{n!}(x - x_0)^n\right)^{(n-1)}}$$

$$\underline{\underline{\quad \quad \quad}} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_{n-1}(x)}{\frac{1}{n!}(x - x_0)^n}$$

n-1次L'Hospital
反向使用

Taylor多项式唯一性

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n), \quad P_n \text{ 是次数 } \leq n \text{ 多项式}$$

$$\stackrel{f^{(n)}(x_0) \exists}{\iff} P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

必要性:

$f(x)$ 两种表达式之差



$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P_n(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

分子是次数 $\leq n$ 多项式



$$P_n(x) \equiv T_n(x).$$

$$f \in C^2(\mathbb{R}), \quad f''(x) + \frac{x}{2}f'(x) + f(x) = 0 \implies f \text{ 与 } f' \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 有上界}$$

$$(f^2 + (f')^2)' = -x(f')^2 \quad \begin{cases} \leq 0, & x > 0 \\ \geq 0, & x < 0. \end{cases}$$

$\implies f^2 + (f')^2$ 在 $x = 0$ 取最大值, 故有上界.

高阶导数差分刻画

$$f^{(n)}(x_0) \stackrel{f^{(n)}(x_0) \exists}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k f(x_0 + kh)}{h^n}.$$

特例

特例: $f(x) = x^m$, $x_0 = 0$

Dirac函数的分解:

$$\delta_{mn} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k k^m, \quad 0 \leq m \leq n.$$

Dirac函数的分解

$$\delta_{mn} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k k^m, \quad (1-x)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k x^k$$

$$x = 1 : \quad 0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k$$

$$\left. \frac{d}{dx} \right|_{x=1} : \quad 0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k k$$

$$\left. \frac{d^2}{dx^2} \right|_{x=1} : \quad 0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k k(k-1) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k k^2$$

.....

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^n}{dx^n} \right|_{x=1} : \quad & (-1)^n n! = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k k(k-1) \cdots (k-n+1) \\ & = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k k^n \end{aligned}$$

高阶导数差分刻画的证明

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k f(x_0 + kh)}{h^n} \\ = & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k \left(f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} kh + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (kh)^n + o(h^n) \right) \\ = & f^{(n)}(x_0) \end{aligned}$$

例题

$$\implies \quad f \in C^2[0, 1], \quad f(0) = f(1) = 0, \quad \min_{x \in [0, 1]} f(x) = -1$$
$$\implies \quad \exists \xi \in (0, 1), \quad f''(\xi) = 8$$

例题续

证明: 假设 x_0 是 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 最小值. $f(x_0) = -1, f'(x_0) = 0$.

$$f(0) \xrightarrow{\exists \xi_1 \in (0,1)} f(x_0) + f'(x_0)(0 - x_0) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(0 - x_0)^2$$

$$f(1) \xrightarrow{\exists \xi_2 \in (0,1)} f(x_0) + f'(x_0)(1 - x_0) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(1 - x_0)^2$$

$$x_0 \in (0, \frac{1}{2}] \implies f''(\xi_1) = \frac{2}{x_0^2} \geq 8, \quad f''(\xi_2) = \frac{2}{(1 - x_0)^2} \leq 8$$

$$\xrightarrow{\text{Darboux介值定理}} \exists \xi \in (0, 1) : f''(\xi) = 8.$$

$(x_0 \in (\frac{1}{2}, 1))$ 类似讨论).

航母的横截面是梯形, 底边长=斜边长= a .

问题: 斜边和底边夹角 θ 多大时, 横截面最大.

解: 横截面积

$$S(\theta) = \frac{(a + 2a \cos \theta) + a}{2} a \sin \theta = a^2(1 + \cos \theta) \sin \theta, \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

$$S' = 0 \implies \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\xRightarrow{S(0)=0} \theta = \frac{\pi}{3} \text{ 是内部唯一极值点, 而且不可能是最小值点}$$

$$\implies \theta = \frac{\pi}{3} \text{ 是最大值点.}$$

例题

$$e^{-x}f'(x) = O(1), x \rightarrow +\infty \xRightarrow{f \in C^1(\mathbb{R})} e^{-x}f(x) = O(1), x \rightarrow +\infty.$$

证明:

$$e^{-x}f(x) \underset{\substack{x \rightarrow +\infty \\ \text{Cauchy中值定理}}}{=} \frac{f(x) - f(1)}{e^x - e} \frac{e^x - e}{e^x} + o(1)$$
$$\underset{\text{Cauchy中值定理}}{=} \frac{f'(\xi)}{e^\xi} \frac{e^x - e}{e^x} + o(1) = O(1)$$

第22次作业: [3.7] 8

数学分析(A1), 第23次课

任广斌(中国科大)

2023-11-8

本次课主要内容 (第四章: Taylor定理)

- 微分定义
 - 一阶微分形式不变性
 - 高阶微分

微积分中的微

- 微积分中的微是指一点附近、局部。
- 局部 $\xrightarrow{\text{以直代曲}}$ 非规则的正则化、非理想的理想化.
- 微分 $\xrightarrow{\text{顾名思义}}$ 微小变化量.
- 微分 $\xlongequal{\hspace{1cm}}$ 自变量的微小改变量引起函数的微小该变量
- 函数的微小改变量 $\xrightarrow[\text{约等}]{\text{以直代曲}}$ 切线的微小改变量

可微定义

f 在 x_0 可微 $\iff f$ 在 x_0 附近有定义, $\exists$ 常数 $\lambda \in \mathbb{R}$, 使得

$$\underbrace{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}_{\text{函数改变量}} = \underbrace{\lambda \Delta x}_{\text{以直代曲(逼近)}} + o(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0$$

- λ 唯一, $\lambda = f'(x_0)$
- $\lambda \Delta x$ 称为 f 在 x_0 微分. 记为

$$dy := \lambda \Delta x = f'(x_0) \Delta x.$$

微分定义

微分=函数改变量的线性部分(主部)=Taylor展开的第二项= dy .

$$\underbrace{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}_{= \Delta y} = \underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{= dy} + \underbrace{o(\Delta x)}_{\text{可忽略}}$$

$$dx := \underbrace{\Delta x}_{\text{自变量的改变量}}$$

注记: $dx = dy|_{y=f(x)=x}$

从Taylor展开看微分

微分是Taylor展开的一次项部分。

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{= dy} + \underbrace{o(\Delta x)}_{\text{可忽略}}$$

切线视为一维线性空间=切线平移到原点=切空间

微分是直线的方程表示, 该直线过原点平行于切线.

$$\underbrace{dy}_{\text{dy是切空间的因变量}} = \underbrace{f'(x)}_{\text{x起着参数的作用}} \underbrace{dx}_{\text{dx是切空间的自变量}}$$

- 微分是两个独立变量的函数:

$$dy = f'(x)dx, \quad x, dx \text{ 是两个独立变量.}$$

- dy 总默认为 dx 的线性函数

$$dy = \underbrace{f'(x)}_{\text{伸缩率}} \underbrace{dx}_{\text{新变量}}.$$

- dx 是切线(平移到原点)上变量, 表示任意的量, 而非小量.
 Δx 是小量.

- dx 的两重身份: 切空间的自变量; 函数 $f(x) = x$ 的微分

曲线和切线

	曲线	曲线
	改变	改变量
自变量	$x_0 \implies x_0 + \Delta x$	Δx
函数	$f(x_0) \implies f(x_0 + \Delta x)$	$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$
	切线	切空间
	改变	改变量
自变量	$x_0 \implies x_0 + dx$	$dx = \Delta x$
函数	$f(x_0) \implies f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$	$dy = f'(x_0)dx$

注记1

- 曲线上的变化量:

Δx	Δy
自变量改变量	函数改变量
	难计算

- 切空间上的变化量:

dx	dy
自变量微分	函数微分
$dx = \Delta x$	易计算 $dy = f'(x_0)dx$

- 涉及两个图形(以直代曲)的多个变量:

曲线	切空间
$x_0, f(x_0), \Delta x, \Delta y$	dx, dy

注记3

- 单变量微积分需要多变量微积分帮忙:

固定曲线上的点 $(x_0, f(x_0))$ 看变化量 $\begin{cases} \Delta x, \Delta y & \text{曲线} \\ dx, dy & \text{切空间} \end{cases}$

- 两个独立变量



- 微分的常用记号 (Leibniz)

$$dy = f'(x)dx = f'(x)\Delta x$$

$$dy = df(x) = d(f(x)) = (df)(x) = df(x, \Delta x) = df(x, dx)$$

- 微分的最常用记号

$$df(x) = \text{默认 } df \text{ 是 } dx \text{ 的线性函数}$$

- 微分的直观看法:

$$df(x) = f'(x)dx.$$

- 导数=微商=微分之商

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}, \quad \text{分子分母有独立意义.}$$

- 微分的独立意义

dx, dy 具有独立意义. 它们是切空间中的变量和函数

- 微元法的核心

直接在切线上处理问题, dx , dy 都是切空间上的量

无论 dx , dy 给定, 或者变化, 它们之间相差固定倍数 $f'(x)$

微元法

$\frac{dy}{dx}$	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$
微商	差商极限
切线	曲线
两程序合二为一	精确表达
物理学家	数学家

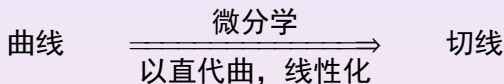
微分的核心秘密(上)

- 曲线 线性化 切线的一丛 $\equiv$ 切丛
- 曲线和切线的全貌

$$\text{切丛} = \bigcup_{(x, f(x)) \in \text{曲线}} (x, f(x)) \text{点处的切线}$$

微分的核心秘密(下)

- 给定曲线，如影随形伴随着一簇切线。从一簇切线的信息提取曲线的信息。



- 涉及两个函数:

曲线	切线
流形	切丛
	(线性子空间=切线平移到原点)

可导和可微关系

在单变量微积分中, 可导和积分是一体两面, 是一回事.

可导 $\xleftrightarrow{\text{单变量微积分}}$ 可微

求微分 $\equiv$ 求导.

$$dy = f'(x)dx$$

例子 $d \sin x = \cos x dx.$

$$df(x) = f'(x)dx$$

$$d(f(x) + g(x)) = df(x) + dg(x)$$

$$d(fg) = fdg + gdf$$

$$d\frac{f}{g} = \frac{gdf - fdg}{g^2}.$$

一阶微分形式不变性

$$y = f(x), \quad x = \varphi(t), \quad x = \text{中间变量}, \quad t = \text{自变量}$$

$$\implies dy = f'(x)dx = (f(\varphi(t)))'dt$$

$$dy = df(\varphi(t)) = \frac{df(\varphi(t))}{dt}dt = f'(x)\varphi'(t)dt = \underbrace{f'(x)}_{t \text{ 的函数}} \underbrace{dx}_{t, dt \text{ 的函数}}$$

微分与坐标系选取无关 $\iff$ 一阶微分形式不变性

$\iff$ 复合函数求导

$\iff$ $dy = f'(x)dx$, x 是自变量或中间变量

利用微分形式的一阶不变性, 计算微分不必考虑真正的自变量是什么.

微分的用途

- 微分是近代数学的入门口

- 微分形式, 张量分析, 外代数理论

——现代微分几何

- 微分形式提供测度

——现代分析学

符号之间关系

	x, dx	$dx, \Delta x$
x 是自变量	独立	$dx = \Delta x$
x 是中间变量	不独立 $x = \varphi(t)$ $dx = \varphi'(t)dt$	$dx \neq \Delta x$

高阶微分

- 一阶微分

$$dy \underset{x \text{ 是自变量}}{\overset{y = f(x)}{=}} f'(x)dx$$

将 dy 作为 x 的函数(dx 作为参变量固定), 对 dy 再微分

- 二阶微分

$$d^2y =: d(dy) = f''(x)dx dx =: f''(x)dx^2$$

$$\iff f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

- n 阶微分

$$d^n y = d(d^{n-1} y) = \overbrace{d \cdots d}^n y = f^{(n)}(x)(dx)^n =: f^{(n)}(x)dx^n$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

$$d^n y = \overbrace{d \cdots d}^n y, \quad dx^n = (dx)^n \text{当代书写顺序}$$

$d^n x$	dx^n	$d(x^n)$
$\underbrace{d \cdots d}_n x$	$(dx)^n$	$nx^{n-1}dx$

二阶微分不具形式不变性: 与坐标系选取有关

$$y = f(x), \quad x = \varphi(t)$$

$$d^2y = f''(x)dx^2, \quad \forall f$$

$$\implies \varphi(t) = at + b.$$

$$dy = f'(x)dx$$

$$d^2y = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x$$

$$d^2x = d(\varphi'(t))dt = \varphi''(t)(dt)^2 = 0 \implies \varphi''(t) = 0$$

参数方程求导

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad \text{求 } y'(x), \quad y''(x)$$

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)dt}{\varphi'(t)dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

$$y''(x) = \frac{d(y'(x))}{dx} = \frac{d\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}}{d\varphi(t)} = \frac{(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)})' dt}{\varphi'(t)dt} = \frac{(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)})'}{\varphi'(t)}$$

$$d^2y \neq y''(x)dx^2 \quad x \text{ 是中间变量}$$

$$x = y + \ln y$$

$$\implies dx = \left(1 + \frac{1}{y}\right)dy$$

$$\implies \frac{dy}{dx} = \frac{y}{1 + y}$$

$S = S(r)$ = 半径为 r 的圆面积

$$\Delta S = S(r + \Delta) - S(r) = \pi(r + \Delta)^2 - \pi r^2 = 2\pi r\Delta + (\Delta r)^2$$

$$\implies dS = 2\pi r dr$$

微元法: 当自变量半径从 r 变到 $r + dr$, 相应面积微分

$$dS \xrightarrow[\text{直观}]{\text{微元法}} 2\pi r dr.$$

$$y = e^{ax^2+bx}$$

$$y = e^u, \quad u = ax^2 + bx$$

$$dy = e^u du = e^{ax^2+bx}(2ax + b)dx.$$

第23次作业: [4.1] 3, 4, 5(偶)

数学分析(A1), 第24次课

任广斌(中国科大)

2023-11-10

本次课主要内容

- Taylor展开
 - 带Peano, Lagrange, Cauchy余项的Taylor展开
 - Taylor展开的应用：实解析函数
 - Taylor展开一统天下

带Peano余项的Taylor展开(只涉及极限)

- Taylor展开:

$$f(x) \stackrel{f^{(n)}(x_0)\exists}{\stackrel{=}{=}} T_n(x) + o((x-x_0)^n)$$

$$T_n(x) \stackrel{\text{Taylor多项式}}{\stackrel{=}{=}} f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Taylor展开极限形式

- Taylor展开的极限表达

$$f(x) = T_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

$$f^{(n)}(x_0) \stackrel{f^{(n)}(x_0)\exists}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_{n-1}(x)}{\frac{1}{n!}(x - x_0)^n}$$

- Taylor展开的证明(利用L'Hospital法则算极限)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_{n-1}(x)}{\frac{1}{n!}(x - x_0)^n} \stackrel[n-1 \text{次}]{L'Hospital} f^{(n)}(x_0)$$

函数和Taylor多项式的密切关系

$\forall$ 次数 $\leq n$ 多项式 $P_n \neq T_n$, $\exists \delta > 0$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$:

$$|f(x) - T_n(x)| < |f(x) - P_n(x)|.$$

函数和Taylor多项式的密切关系续

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

$$a_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}, \quad j = 0, 1, \cdots, k-1, \quad a_k \neq \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k < n.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{f(x) - P_n(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o((x - x_0)^n)}{\left(\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} - a_k\right)(x - x_0)^k + o(x - x_0)^k} = 0$$

带Lagrange余项的Taylor展开(涉及中值定理)

- n 阶情形(常数变易法+Cauchy中值定理):

$$f \in C^n[a, b], \quad f^{(n+1)} \text{ 在 } (a, b) \exists$$

$$\implies \forall x, x_0 \in [a, b], \exists \xi \in (x_0, x) \text{ 或 } (x, x_0) :$$

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

- $n = 0$, 此为Lagrange中值定理.

多项式的Taylor展开

- $\forall n$ 次多项式 $P(x)$, 具有Taylor展开

$$P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

带Cauchy余项的Taylor展开(涉及中值定理)

$$f \in C^n[a, b], \quad f^{(n+1)} \text{ 在 } (a, b) \text{ 存在}, \quad p > 0$$

$$\implies \forall x, x_0 \in [a, b], \exists \theta \in (0, 1) :$$

$$f(x) = T_n(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \frac{n+1}{p} (1 - \theta)^{n+1-p}}_{\text{Cauchy 余项}}$$

$$p = \begin{cases} n+1, & \text{Lagrange 余项} \\ 1, & \text{Cauchy 余项} \end{cases}$$

带Cauchy余项的Taylor展开的证明

- 常数变易法: 固定 x , 将 x_0 换为变量 t

$$S_n(t) := f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

$$\varphi(t) := (x-t)^p$$

$$\begin{aligned} S'_n(t) &= (f'(t)) + (-f'(t) + \frac{f''(t)}{1!}(x-t)) \\ &\quad + (-\frac{f''(t)}{1!}(x-t) + \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2) + \cdots \\ &= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n. \end{aligned}$$

带Cauchy余项的Taylor展开的证明(续)

- Cauchy中值定理: x 固定, t 变量

$$f(x) - S_n(x_0) = \frac{S_n(x) - S_n(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} (\varphi(x) - \varphi(x_0))$$

Cauchy

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x - \xi)^n}{n!}}{-p(x - \xi)^{p-1}} (-(x - x_0)^p)$$

$$\frac{\xi = x_0 + \theta(x - x_0)}{\theta \in (0, 1)}$$

$$\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \frac{n+1}{p} (1 - \theta)^{n+1-p}$$

局部和整体Taylor展开

带Peano余项的Taylor展开	局部	条件弱
带Lagrange余项的Taylor展开	整体	条件强
带Cauchy余项的Taylor展开	整体	条件强

Taylor展开的应用: 利用Taylor展开判断极值点

设 f 在 x_0 附近 n 次可导

$$f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

$$\implies \begin{cases} x_0 \text{ 非 } f \text{ 极值点,} & n \text{ 奇} \\ x_0 \text{ 是 } f \text{ 极值点,} & n \text{ 偶} \end{cases} \begin{cases} \text{极大值} & f^{(n)}(x_0) < 0 \\ \text{极小值} & f^{(n)}(x_0) > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

典型例子: $f(x) = x^2, \quad x^3.$

$$f \in C^\omega(a, b) \stackrel{\text{def}}{\iff} f \in C^\infty(a, b), \forall x_0 \in (a, b), \text{ 在 } x_0 \text{ 附近成立}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

$f \in C^\omega(a, b) \xLeftrightarrow{\text{等价描述}} f \in C^\infty(a, b), \forall x_0 \in (a, b), \text{ 在 } x_0 \text{ 附近成立}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(f(x) - T_n(x, x_0))}_{\text{Cauchy余项}} = 0$$

实解析判别准则

$f \in C^\omega(a, b) \iff f \in C^\infty(a, b)$, 成立局部一致 *Cauchy* 不等式:

$\forall x_0 \in (a, b), \exists \delta > 0, M > 0, R > 0 :$

$$\left| \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \right| \leq M \frac{1}{R^n},$$

$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b),$

$\forall n = 0, 1, \dots$

Taylor 展开一统天下

- 连续: $f(x) = f(x_0) + o(1)$
- 可导: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$
- 中值定理: $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$
- Fermat定理:

$$x_0 \text{ 是 } f \text{ 极值点} \xrightarrow[f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)]{f'(x_0)\exists} f'(x_0) = 0$$

Taylor 展开一统天下(续1)

- 极值:

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) > 0 \implies f(x) \geq f(x_0) \text{极小值}$$

- 证明:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) \\ &\geq f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{4}(x - x_0)^2 \\ &\geq f(x_0) \end{aligned}$$

- 单调:

$$f' > 0 \implies f \nearrow$$

- 证明:

$$x > x_0 \implies f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) \geq f(x_0)$$

Taylor 展开一统天下(续3)

- 凸凹:

$$f'' > 0 \implies f \text{凸}$$

- 证明

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2$$

支撑线

$\implies$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

x 用 x_i 代替

$\implies$

$$x_0 = (1 - t)x_1 + tx_2$$

$$(1 - t)f(x_1) + tf(x_2) \geq f((1 - t)x_1 + tx_2)$$

- L'Hospital法则:

Taylor 展开 $\implies$ L'Hospital法则

微分=函数改变量的线性部分(主部)=Taylor展开的第二项= dy .

$$\underbrace{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}_{= \Delta y} = \underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{= dy} + \underbrace{o(\Delta x)}_{\text{可忽略}}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

- $f \in C^\infty(\mathbb{R})$:

f 的 n 次Taylor展开恒为零, f 的Taylor展开恒为零.

- f 具有Laurent展开:

====>复分析

$$e^{-\frac{1}{z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{z^2} \right)^n, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

- 光线传播的路径是需时最少的路径.

⟹ 变分法

上半平面和下半平面分别是均匀介质, 光线在上半平面传播速度是常值 V_A , 在下半平面传播速度是常值 V_B . 假设光线从上半平面的 $(0, h)$ 出发, 沿着入射角 α 的直线到达实轴 $(x, 0)$, 经过折射后, 沿着折射角 β 的直线到达终点 $(c, -k)$.

- 运行时间为

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{V_A} + \frac{\sqrt{(c-x)^2 + k^2}}{V_B}$$

- 驻点为最小值点:

$$\begin{aligned}
 0 = T'(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} \frac{1}{v_A} - \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2 + k^2}} \frac{1}{v_B} \\
 &= \frac{\cos \alpha}{v_A} - \frac{\cos \beta}{v_B}
 \end{aligned}$$

$$T'(0) < 0, \quad T'(c) > 0 \xRightarrow{T''(x) > 0} \text{最小值在内部达到}$$

- 折射原理

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{v_A}{v_B}$$

两次利用中值定理

设 $f, g \in C[a, b]$, 在 (a, b) 可导, g' 恒不为零, 则存在 $\xi, \eta \in (a, b)$, s.t.

$$f'(\xi) = \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)} \frac{g(b) - g(a)}{b - a}.$$

同一个量采用两种方法计算产生等式:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \begin{cases} \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}, & \text{Cauchy中值定理;} \\ \frac{f'(\xi)(b - a)}{g(b) - g(a)}, & \text{Lagrange中值定理.} \end{cases}$$

两次利用中值定理

设 $f, g \in C[a, b]$, 在 (a, b) 可导, $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$. 则存在 $\xi, \eta \in (a, b), \xi \neq \eta$ s.t.

$$f'(\xi) + f'(\eta) = g'(\xi) + g'(\eta).$$

证明

$$G(x) = f(x) - g(x), \quad c = \frac{a+b}{2}.$$

$$\xRightarrow{\text{Lagrange}} \begin{cases} G(c) - G(a) = G'(\xi)(c - a) \\ G(b) - G(c) = G'(\eta)(b - c) \end{cases}$$

$$\xRightarrow[\text{G(a)=G(b)=0}]{\text{两式相加}} G'(\xi) + G'(\eta) = 0$$

$$\xRightarrow{\quad\quad\quad} f'(\xi) + f'(\eta) = g'(\xi) + g'(\eta).$$

$f, g \in C[a, +\infty)$, 在 $(a, +\infty)$ 可导,

$$|f'(x)| \leq g'(x), \quad \forall x \in (a, +\infty)$$

$$\implies |f(x) - f(a)| \leq |g(x) - g(a)|$$

证明

情形1: $g' > 0$.

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \right| \leq 1.$$

情形2: $g' \geq 0 \xrightarrow[g' > 0]{g_\epsilon(x) := g(x) + \epsilon x, \quad \forall \epsilon > 0} g'_\epsilon > 0$.
扰动法

$$\begin{aligned} |f'(x)| \leq g'(x) < g'_\epsilon(x) &\xrightarrow{\text{情形1}} |f(x) - f(a)| \leq |g_\epsilon(x) - g_\epsilon(a)| \\ &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} |f(x) - f(a)| \leq |g(x) - g(a)|. \end{aligned}$$

第24次作业:

[4.1] 1

[4.2] 3

数学分析(A1), 第25次课

任广斌(中国科大)

2023-11-13

数学分析A1期中考试

- 考试时间：2023年11月19日星期天，晚上7:00-9:00
- 考试教室：五教5202

本次课主要内容

- 初等函数Taylor展开

有理数: 实数

=====

多项式: 初等函数

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

$$a_0 \in \mathbb{Z}, a_j = 0, 1, \dots, 9$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Taylor展开

- Taylor多项式

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

- 带Cauchy余项Taylor展开

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \frac{n+1}{p} (1 - \theta)^{n+1-p}$$

- Taylor级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \iff_{f \in C^\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0.$$

基本初等函数Taylor展开

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n,$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n},$$

$$(1+x)^\alpha \stackrel[\alpha \in \mathbb{R}]{ |x| < 1 }{=} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n,$$

$$\ln(1+x) \stackrel{ |x| < 1 }{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n,$$

$$\arctan x \stackrel{ |x| < 1 }{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

指数函数Taylor展开

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \theta \in (0, 1).$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} = 0.$$

初等函数

$\mathbb{R}$

e^x + (+逆+代数复合运算)

1 + (代数极限运算)

e 是无理数

- $e \notin \mathbb{Q}$

反证:

$$e = \frac{p}{q}$$

其中 $p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$

$$\mathbb{Z} \ni n! \left(\frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) \right) = \frac{e^\theta}{n+1} \in (0, 1), \quad n \gg 1.$$

正弦函数Taylor展开

$$\sin x \stackrel{\theta \in (0,1)}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{\sin(\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2})}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

$$(\sin x)^{(k)} \Big|_{x=0} = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) \Big|_{x=0} = \begin{cases} 0, & k = 2m \\ (-1)^m. & k = 2m + 1. \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2})}{(2n+1)!} x^{2n+1} = 0.$$

正弦函数Taylor展开(续)

- $\sin x = \operatorname{Im} e^{ix} = \left(\frac{1}{i}(e^{ix})\right)^{\text{odd}}$
- 求导改变奇偶性:

$$f(x) = -f(-x) \xRightarrow{\forall k \in \mathbb{N}} f^{(2k)}(x) = -f^{(2k)}(-x), \quad f^{(2k-1)}(x) = f^{(2k-1)}(-x).$$

$$f \text{ 奇} \implies f' \text{ 偶} \implies f'' \text{ 奇} \implies \dots$$

$$f(x) = f(-x) \xRightarrow{\forall k \in \mathbb{N}} f^{(2k)}(x) = f^{(2k)}(-x), \quad f^{(2k-1)}(x) = -f^{(2k-1)}(-x).$$

$$f \text{ 偶} \implies f' \text{ 奇} \implies f'' \text{ 偶} \implies \dots$$

- $f \text{ 奇} \implies T_n \text{ 奇}.$

余弦函数Taylor展开

$$\cos x \stackrel{\theta \in (0,1)}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{\cos(\theta x + (2n+2)\frac{\pi}{2})}{(2n+2)!} x^{2n+2}.$$

$$(\cos x)^{(k)} \Big|_{x=0} = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) \Big|_{x=0} = \begin{cases} 0, & k = 2m+1 \\ (-1)^m, & k = 2m. \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(\theta x + (2n+2)\frac{\pi}{2})}{(2n+2)!} x^{2n+2} = 0.$$

幂函数Taylor展开

$$(1+x)^\alpha \stackrel[\substack{\theta \in (0,1) \\ |x| < 1}]{=} 1 + \sum_{k=1}^n \binom{\alpha}{k} x^k + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} (1+\theta x)^{\alpha-n-1} x^{n+1} (1-\theta)^n$$

$$((1+x)^\alpha)^{(k)} \Big|_{x=0} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(k-1))(1+x)^{\alpha-k} \Big|_{x=0} = \binom{\alpha}{k} k!$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} x^{n+1} \underbrace{\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n (1+\theta x)^{\alpha-1}}_{\text{有界}} = 0.$$

$$0 < \frac{1 - \theta}{1 + \theta x} < 1, \quad \forall \theta \in (0, 1), \quad |x| < 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k x^n \stackrel{|x| < 1}{a=1/x} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$$

为何不能使用Lagrange余项?

- Cauchy余项的作用在于相关项的有界，该有界性来自于上述不等式：

$$0 < \frac{1 - \theta}{1 + \theta x} < 1, \quad \forall \theta \in (0, 1), \quad |x| < 1.$$

注意该有界性不保证相应的项极限为零。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \theta_n}{1 + \theta_n x} \right)^n = 0 \quad (\text{该式不一定成立})$$

- 对于Lagrange余项相关不等式不再成立：

$$0 < \frac{1}{1 + \theta x} < 1, \quad \forall \theta \in (0, 1), \quad |x| < 1. \quad (\text{该式不成立})$$

幂函数Taylor展开续

$$(1+x)^\alpha \underset{|x|<1}{\stackrel{\forall \alpha \in \mathbb{R}}{=}} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots$$

特例： 四种情形 $\alpha = -1, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$.

总是假设： $|x| < 1$.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$\xRightarrow{\text{求导}} \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \dots$$

$$\xRightarrow{\text{求导}} \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \underbrace{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2k-3}{2})}_{k\text{项}} \frac{1}{k!} = (-1)^{k-1} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}.$$

对数函数Taylor展开

$$\frac{1}{1-x} \stackrel{|x|<1}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{1+x} \stackrel{|x|<1}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

$$\stackrel{\text{反向形式求导}}{\Longrightarrow} \ln(1+x) \stackrel{|x|<1}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots$$

求导确定Taylor展开法则

$$\begin{cases} f'(x) = g'(x) \\ f(0) = g(0) \end{cases} \implies f = g$$

对数函数Taylor展开(续)

$$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$$

$$(\ln(1+x))^{(k)} = \left(\frac{1}{1+x}\right)^{(k-1)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{(-1)^n n!}{(1+\theta x)^{n+1}} \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} (n+1)(1-\theta)^n \\ &= \frac{(-1)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} x^{n+1} (1-\theta)^n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

反三角函数Taylor展开

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

$$\xrightarrow{\text{反向形式求导}} \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \dots$$

反三角函数Taylor展开(续)

$$y = \arctan x, \quad x = \tan y$$

$$\implies y' = \cos^2 y = \cos y \sin(y + \frac{\pi}{2})$$

$$\implies y'' = 2 \cos y (-\sin y) y' = \cos^2 y \sin 2(y + \frac{\pi}{2})$$

$$\xRightarrow{\text{归纳法}} y^{(n)} = (n-1)! \cos^n y \sin n(y + \frac{\pi}{2})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos^{n+1} y(\zeta) \sin(n+1)(y(\zeta) + \frac{\pi}{2})}{n+1} = 0.$$

三角公式

出发点: $e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}$, $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$\cos(x+y) = \operatorname{Re} e^{ix+iy} = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

y 换为 -y

$$\cos(x-y) = \operatorname{Re} e^{ix-iy} = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

两者相加

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$$

反三角函数(续)

$$y = \arctan x$$

$$y^{(n)} = (n-1)! \cos^n y \sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$$

反三角函数(续)

证明: 归纳法.

$$\begin{aligned}y^{(n+1)} &= n! \cos^n y \cos n(y + \frac{\pi}{2})y' + n! \cos^{n-1} y (-\sin y)y' \sin n(y + \frac{\pi}{2}) \\&= n! \cos^{n+1} y \left(\cos y \cos n(y + \frac{\pi}{2}) - \sin y \sin n(y + \frac{\pi}{2}) \right) \\&= n! \cos^{n+1} y \cos ((n+1)y + n\frac{\pi}{2}) \\&= n! \cos^{n+1} y \sin ((n+1)(y + \frac{\pi}{2}))\end{aligned}$$

$e^{\sin x}$ 展开至 x^3

例题续

$$\begin{aligned}e^{\sin x} &= 1 + \frac{1}{1!}\left(x - \frac{1}{3!}x^3\right) + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) \\&= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\end{aligned}$$

计算 $\sqrt[5]{2}$ 误差 $< 10^{-3}$.

$$a = \sqrt[5]{2} \frac{a^5=2, \ a \approx \frac{6}{5}}{a^5=(\frac{6}{5})^5(1-b)} \frac{6}{5}(1-b)^{\frac{1}{5}} \implies b = 1 - 2\left(\frac{5}{6}\right)^5 \in \mathbb{Q} \cap (0, 1).$$

$$(1+x)^\alpha \stackrel{\theta \in (0,1)}{=} 1 + \sum_{k=1}^n \binom{\alpha}{k} x^k + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} (1+\theta x)^{\alpha-n-1} x^{n+1} (1-\theta)^n$$

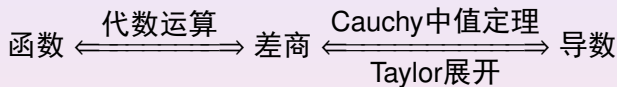
$$\alpha = \frac{1}{5}, \quad x = -b, \quad n = 3$$

$$\sqrt[5]{2} = \frac{6}{5}(1-b)^{\frac{1}{5}} \simeq \frac{6}{5} \left(1 + \frac{\frac{1}{5}}{1!}(-b) + \frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5}-1)}{2!}(-b)^2 + \frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5}-1)(\frac{1}{5}-2)}{3!}(-b)^3 \right)$$

$$R_3(-b) \leq \left| \frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5}-1)(\frac{1}{5}-2)(\frac{1}{5}-3)}{3!} \right| (1-b)^{\frac{1}{5}-4} b^4 \leq 4 \times 10^{-4}.$$

$$1 - |x| < |1 + \theta x| < 1 + |x|$$

注记: 函数与导数的联系



f 在 $[a, b]$ 连续, (a, b) 可导, f 非一次多项式,

$\implies \exists \xi, \eta \in (a, b) :$

$$f'(\xi) > \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > f'(\eta)$$

例题(续)

证明: 采用曲线-割线方法:

不妨设 $f(a) = f(b) = 0$, f 不恒为零.

不妨设存在 $x_0 \in (a, b)$: $f(x_0) > 0$.

$$f'(\xi) \stackrel{\text{Lagrange}}{=} \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} = \frac{f(x_0)}{x_0 - a} > 0$$

$$f'(\eta) \stackrel{\text{Lagrange}}{=} \frac{f(x_0) - f(b)}{x_0 - b} = \frac{f(x_0)}{x_0 - b} < 0$$

f 在 $[0, +\infty)$ 凸

$$\implies f(a) + f(b) \leq f(0) + f(a + b) \quad \forall a, b \in [0, +\infty).$$

证明: 不妨设 $0 < a \leq b < a + b$, 则由四点判别法

$$\frac{f(a) - f(0)}{a - 0} \leq \frac{f(a + b) - f(b)}{(a + b) - b}$$

第25次作业:

[4.2] 1

[4.3] 1, 2(4), 5

数学分析(A1), 第26次课

任广斌(中国科大)

2023-11-15

本次课主要内容

- Taylor展开的应用

$\mathbb{Q} : \mathbb{R} \Longleftrightarrow$ 多项式 : 初等函数

初等函数用低级多项式替代 $\left\{ \begin{array}{l} \text{一次多项式: 单调性 } f' \geq 0; \text{ 极值} \\ \text{二次多项式: 凸凹性 } f'' \geq 0 \end{array} \right.$

- 单调性:

$$f' \geq 0 \implies \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\zeta) \geq 0 \implies f \nearrow.$$

- 凸凹性

$$f'' \geq 0 \implies f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) = \frac{f''(\zeta)}{2!} (x - x_0)^2 \geq 0 \implies f \text{凸}.$$

初等函数视为多项式

初等函数极限 $\xrightarrow[\text{Peano余项}]{\text{Taylor}}$ 有理函数极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \arctan x}{\sin x - \tan x}$$

$$\text{分子} = \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$(\cos x) \text{分母} = \sin x(\cos x - 1) = -\frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

Taylor系数的计算

例题 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a_2(x-1)^2 + a_1(x-1) + a_0 - \sqrt{x^2+3}}{(x-1)^2} = 0$

求 a_k

已知条件 $\iff \sqrt{x^2+3} = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + o((x-1)^2)$

$$\implies a_k = \frac{f^{(k)}(1)}{k!}.$$

Taylor系数的计算

求 $\tan x$ 的三次 Taylor 多项式.

方法一: $\tan x$ 是奇函数, $\tan x = a_1x + a_3x^3 + o(x^3)$

$$a_1 = (\tan x)' \Big|_{x=0}, \quad a_3 = \frac{(\tan x)'''}{3!} \Big|_{x=0}.$$

方法二: 利用已知的Taylor展开:

$$\tan x = \frac{x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)}{1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^2)} = x + a_3x^3 + o(x^3)$$

$$\implies x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) = (1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^2))(x + a_3x^3 + o(x^3))$$

比较系数

$$\implies -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{2!} + a_3$$

$$\implies a_3 = \frac{1}{3}$$

Taylor展开的中值余项估计产生不等式

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \quad \forall x > 0.$$

$$x - \frac{1}{2}x^2 < \ln(1+x) < x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3, \quad \forall x > 0.$$

$$\ln(1+x) \quad \Longrightarrow \quad \log 1 + \frac{1}{1+\theta x}x \in \left(\frac{x}{1+x}, x\right)$$

$$\ln(1+x) \quad \Longrightarrow \quad x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!} \frac{2!}{(1+\theta x)^3} x^3, \quad \theta \in (0, 1)$$

$$\ln(1+x) \quad \Longrightarrow \quad x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4!} \frac{3!}{(1+\theta x)^4} x^4, \quad \theta \in (0, 1).$$

两个Taylor公式(其一为条件)的应用

$$f''(0)\exists, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

两个Taylor公式:

$$f(x) = o(x) \quad x \rightarrow 0 \quad \text{此为已知条件}$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + o(x^2) \quad \text{此为典型公式}$$

$$\begin{aligned} \text{两个Taylor公式} &\implies f(x) = \frac{f''(0)}{2!}x^2 + o(x^2) \\ &\implies f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{f''(0)}{2!} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \end{aligned}$$

两个Taylor公式(其一为条件)的应用(续)

$$f(x_0 + h) \stackrel[\theta=\theta(h,n)\in(0,1)]{f^{(n+1)}(x_0)\neq 0} f(x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)}{(n)!} h^n$$

$$\implies \lim_{h\rightarrow 0} \theta(h, n) = \frac{1}{n+1}.$$

两个Taylor公式(其一为条件)的应用(续)

两个Taylor公式:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0) + f^{(n+1)}(x_0)\theta h + o(h)}{n!} h^n$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} h^{n+1} + o(h^{n+1})$$

$$\text{两式相减} \implies \theta = \frac{1}{n+1} + o(1), \quad h \rightarrow 0.$$

两个Taylor公式(其一为条件)的应用(续)

$$f(x+h) \stackrel[\exists \theta \in (0,1) \forall x,h]{f^{(n+2)} \exists} f(x) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x+\theta h)}{n!} h^n$$

$\Longleftrightarrow f$ 是次数 $\leq n+1$ 的多项式

必要性证明

两个Taylor公式:

$$f(x+h) = T_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(x) + f^{(n+1)}(x)\theta h + \frac{f^{(n+2)}(x)}{2!}(\theta h)^2 + o(h^2)}{n!} h^n$$

$$f(x+h) = T_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n + \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} h^{n+1} + \frac{f^{(n+2)}(x)}{(n+2)!} h^{n+2} + o(h^{n+2})$$

$$\xRightarrow{\text{相减}} \begin{cases} f^{(n+1)}(x) \left(\frac{1}{n+1} - \theta \right) = 0 \\ f^{(n+2)}(x) \left(\frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{\theta^2}{2} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\exists f^{(n+1)}(x_0) \neq 0 \implies \theta = \frac{1}{n+1} \implies f^{(n+2)} \equiv 0.$$

充分性证明

$$\theta := \frac{1}{n+1}$$

一次多项式 $f^{(n)}$:

$$f^{(n)}(x + \theta h) = f^{(n)}(x) + f^{(n+1)}(x)\theta h.$$

代入

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^n(x)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}h^{n+1} \\ &= f(x) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x + \theta h)}{n!}h^n \end{aligned}$$

三个导函数之间关系

f 在 $\mathbb{R}$ 二次可微 f'' 不恒为零, $M_k := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$

$$\implies M_1^2 \leq 2M_0M_2$$

$a \in \mathbb{R}$. 在 $(a, +\infty)$ 上相应结果修改为:

$$M_1^2 \leq 4M_0M_2.$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1, & x \in (-1, 0) \\ \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, & x \in [0, +\infty) \end{cases}$$

$$M_0 = 1, \quad M_1 = 4, \quad M_2 = 4.$$

三个导函数之间关系

两个Taylor公式

$$\begin{cases} f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\zeta_1)}{2}h^2 \\ f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(\zeta_2)}{2}h^2 \end{cases}$$

三个导函数之间关系(续)

不妨设 $M_0, M_2 \in (0, \infty)$, 两个Taylor公式之差导出

$$2f'(x)h \leq 2M_0 + M_2h^2, \quad \forall h > 0$$

$$\implies 2M_1h \leq 2M_0 + M_2h^2, \quad \forall h > 0$$

$$\implies M_1 < +\infty, \quad \text{取 } 2M_0 = M_2h^2$$

$$\implies M_1^2 \leq 2M_0M_2.$$

在 $(a, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{f(x+2h) - f(x)}{2h} - hf''(\xi)$$

$$M_1 \leq \frac{M_0}{h} + M_2h, \quad \forall h > 0$$

三个函数之间关系的应用

$$f \in C^2(0, +\infty), \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \text{ 存在且有限, } f'' \text{ 有界}$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0.$$

三个函数之间关系的应用

不妨设 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, 记

$$M_k(t) := \sup_{x \in (t, +\infty)} |f^{(k)}(x)|.$$

则

$$M_1^2(t) \leq 4M_0(t)M_2(t)$$

令 $t \rightarrow \infty$ 即可.

三个函数之间关系的应用

假设 $f \in C^2(-1, 1)$.

初值问题
$$\begin{cases} |f''(x)| \leq |f(x)| + |f'(x)| \\ f(0) = f'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\implies f \equiv 0.$$

$$\begin{cases} |f''(x)| \leq |f(x)| + |f'(x)| \\ f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(\zeta)}{2!}x^2 = \frac{f''(\zeta)}{2!}x^2 \\ f'(x) = f'(0) + \frac{f''(\eta)}{1!}x = \frac{f''(\eta)}{1!}x \end{cases}$$

$$M := \max_{x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} |f''(x)| \implies M \leq M\left(\frac{\delta^2}{2} + \delta\right), \quad \delta = \frac{1}{2}$$

$$\implies M = 0 \implies f|_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} = 0$$

将在0点展开, 代之以在 $\pm\frac{1}{2}$ 展开. 同理 $f \equiv 0$.

在极值点处Taylor展开

$f \in C^2[a, b]$, $f(a) = f(b) = 0$, x_0 是 f 的内部极大值点

$$\implies \exists \zeta \in (a, b) : \quad f''(\zeta) = -\frac{8}{(b-a)^2} f(x_0)$$

在极值点处Taylor展开

$$\text{证明: } 0 = f(a) = f(x_0) + \frac{f''(\zeta_1)}{2!}(a - x_0)^2$$

$$0 = f(b) = f(x_0) + \frac{f''(\zeta_2)}{2!}(b - x_0)^2$$

情形1: 假设 $x_0 \in [a, \frac{a+b}{2}]$. (另一情形类似)

$$\xrightarrow{\text{Darboux}} \text{Range } f'' \supset \left[-\frac{2}{(x_0 - a)^2} f(x_0), -\frac{2}{(b - x_0)^2} f(x_0) \right] \ni -\frac{8}{(b - a)^2} f(x_0).$$

割线中值定理

$f \in C^1[a, b]$, f 在 (a, b) 二阶可导

$\implies \forall x \in [a, b], \exists \zeta \in (a, b) :$

$$f(x) = \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) - \frac{f''(\zeta)}{2}(b-x)(x-a).$$

$$(\text{曲线}-\text{割线})|_{\text{边界}} = 0$$

割线中值定理

$$f'' > 0 \implies f(x) \leq l(x) \quad \text{割线}$$

$$|f(x) - l(x)| \leq \frac{(b-a)^2}{8} \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

利用了 $(b-x)(x-a) \leq \left(\frac{(b-x) + (x-a)}{2}\right)^2$.

割线中值定理(续)

$$f(a) = f(x) + f'(x)(a - x) + \frac{f''(\zeta_1)}{2}(a - x)^2$$

$$f(b) = f(x) + f'(x)(b - x) + \frac{f''(\zeta_2)}{2}(b - x)^2$$

计算:

$$\frac{b - x}{b - a} \text{第一式} + \frac{x - a}{b - a} \text{第二式}$$

再利用Darboux定理即可.

f 在 $[0, a]$ 二阶导数存在且有界, f 在内部 $(0, a)$ 取到最大值.

$$\implies |f'(0)| + |f'(a)| \leq Ma \quad (M \text{是}|f''| \text{上界}).$$

证明: 设 $x_0 \in (0, a)$ 是 f 最大值点:

$$f'(0) - f'(x_0) = f''(\zeta_1)(0 - x_0)$$

$$f'(a) - f'(x_0) = f''(\zeta_2)(a - x_0)$$

$$f'(x_0) = 0$$

例题

$$e^{-x}f'(x) = O(1), x \rightarrow +\infty \xRightarrow{f \in C^1(\mathbb{R})} e^{-x}f(x) = O(1), x \rightarrow +\infty.$$

证明:

$$e^{-x}f(x) \underset{\substack{\text{Cauchy中值定理} \\ x \rightarrow +\infty}}{\sim} \frac{f(x) - f(1)}{e^x - e} \frac{e^x - e}{e^x} + o(1)$$
$$\underset{\text{Cauchy中值定理}}{\sim} \frac{f'(\xi)}{e^\xi} \frac{e^x - e}{e^x} + o(1) = O(1)$$

第26次作业: [4.3] 问题2, 4, 5, 6

数学分析(A1), 第27次课

任广斌(中国科大)

2023-11-17

本次课主要内容(第五章 求导的逆运算, §1不定积分)

- 不定积分

微积分基本定理

$$C^1[a, b]/\mathbb{R} \begin{array}{c} \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \\ \xleftarrow{\int_a^x} \end{array} C[a, b]$$

微积分中的主要矛盾.

微积分基本定理续

单射: $F'_1(x) = F'_2(x) \xLeftrightarrow{\text{Lagrange}} F_1 = F_2 + C \xLeftrightarrow{\text{约定}} F_1 = F_2.$

满射: $\forall f \in C[a, b], \exists F(x) = \int_a^x f(t)dt = \text{面积}, \text{ 使得}$

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \xlongequal[\text{需要面积定义}]{\text{直观}} f(x).$$

面积的定义

局部是规则的面积, 极限过程产生不规则图形的面积.

- 分割: $\pi: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad \zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$

$$\|\pi\| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

- 求和:

$$\sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \Delta x_i$$

- 取极限:

$$\text{面积} = \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n f(\zeta_i) \Delta x_i$$

积分符号是象形文字

$$\text{面积} = \int_a^b f(x) dx = \sum_{x \in [a, b]} f(x) dx = \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \Delta x_i,$$

$$\int = \text{sum} \quad \text{拉长}$$

求和指标 $x \in [a, b]$ 是求和哑标

微分的威力在于微元法: 在导数和积分起着关键作用

微元法
直接上切线
逼近极限二合一

$$\underbrace{\frac{dy}{dx}}$$

没有逼近过程

==

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

逼近过程

$$\underbrace{\int_a^b f(x) dx}$$

没有逼近过程

==

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n f(\zeta_i) \Delta x_i$$

逼近过程

微积分基本定理

设 $f \in C[a, b]$, $F \in C^1[a, b]$, 则

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

$$\int_a^x F'(t) dt = F(x) - F(a).$$

- 微积分基本定理的等价陈述

$$C^1[a, b]/\mathbb{R} \quad \xrightleftharpoons[\text{积分}]{\text{求导}} \quad C[a, b]$$

Newton-Leibniz公式是带积分余项的Taylor公式

$$F(x) \stackrel{\substack{F \in C^1[a,b] \\ x_0 \in [a,b]}}{=} \underbrace{F(x_0)}_{\text{零次Taylor多项式}} + \underbrace{\int_{x_0}^x F'(t) dt}_{\text{Taylor展开的积分余项}}$$

原函数: Primitive

$F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上原函数 $\xLeftrightarrow{F \text{ 在 } I \text{ 上可导}} F'(x) = f(x), \forall x \in I$

- 原函数是-1阶导函数
- 不采用记号 $f^{(-1)}$ 的原因:
 - 有更好的象形文字作为记号
 - $f^{(-1)}$ 是多值函数: 导数给定, 函数可相差常数.

最自然的原函数

$$f \in C[a, b] \implies \int_a^x f(t) dt \text{ 是 } f(x) \text{ 在区间 } [a, b] \text{ 上一个原函数}$$

- 原函数全体记为 $\int f(x)dx$
- 不定积分:

$$\int f(x)dx = \text{原函数全体} = \int_a^x f(t)dt + C$$

C 是任意常数, 称为积分常数.

不定积分的符号解释

- 不定积分=原函数全体=-1阶导数=相差常数的一族函数

$$\underbrace{F(x)}_{x\text{的函数}} + \underbrace{C}_{\text{积分常数}} = \underbrace{\int}_{\text{积分符号}} \underbrace{\overbrace{f(x) \, dx}^{\text{积分表达式}}}_{\substack{\text{被积函数} \quad x\text{是积分变量} \\ \text{不再是哑标}}}$$

不定积分的微积分基本定理

设 $f \in C[a, b]$, $F \in C^1[a, b]$, 则

$$\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x)$$

$$\int F'(x) dx = F(x) + C.$$

- 不定积分的微积分基本定理的等价陈述

$$C^1[a, b]/\mathbb{R} \quad \begin{array}{c} \text{求导} \\ \hline \hline \text{积分} \end{array} \quad C[a, b]$$

不定积分计算方法

求导公式 $\xLeftrightarrow{\text{去分母}}$ 微分公式 $\xLeftrightarrow{\text{两边积分}}$ 积分公式

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

$$dF(x) = f(x)dx$$

$$\begin{aligned}\int dF(x) &= \int f(x)dx \\ &= F(x) + c\end{aligned}$$

$$\int f(x)dx \xrightarrow{\text{只要处理微分}} \int dF(x) \xrightarrow{\text{导数积分同归于尽}} F(x) + c$$

- 象形文字:

定积分连续求和的天然解释

- 便于计算:

利用微分公式的反转带有天生的计算方法

不定积分和定积分关系

- 定积分提供不定积分的最自然的代表元.

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C$$

不定积分计算公式: 积分变量代换公式

- 积分变量代换公式=复合函数求导公式:

$$\int f(x)dx \xrightarrow[\text{变量代换}]{x=\varphi(t)} \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

证明: 两边导数相同

不定积分计算公式: 分部积分公式

分部积分公式=微积分基本定理=求导公式

$$\int f(x)dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)df(x)$$

- 求导公式两边积分

$$f(x)g'(x) = (f(x)g(x))' - f'(x)g(x)$$

$$f(x)dg(x) = d(f(x)g(x)) - g(x)df(x)$$

微分学的公式和积分学的公式的对应

积分学	微分学
变量代换	复合函数求导公式 一阶微分形式不变性
分部积分公式 微积分基本定理另一形式	乘积求导公式

微积分三大法宝全部出场

- 原子分解
- 变分法
- 对偶方法

分部积分是对偶方法, 将困难转嫁, 峰回路转.

$C[a, b]$ 上微积分终结

至此 $C[a, b]$ 上微积分结束.

剩下内容:

- 积分计算: 初等函数的不定积分可能不是初等函数.
- $R[a, b]$ 上微积分
- 微积分的应用.

- 积分九九表 $\Longleftrightarrow$ 求导九九表
- 验证积分公式或计算结果: 两边求导.
- 积分线性性 $\Longleftrightarrow$ 求导线性性

积分常用公式: $a > 0$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a} \right) = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} d\frac{x}{a} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

积分常用公式(续)

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}} d\frac{x}{a} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx &= \int \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx \\ &= \int \frac{(x + \sqrt{x^2 + a^2})'}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C \end{aligned}$$

积分常用公式(续)

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{a^2 - (a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ &= \frac{1}{2} (x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}) + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 + x^2} dx &= x \sqrt{a^2 + x^2} - \int \frac{(a^2 + x^2) - a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} \\ &= \frac{1}{2} (x \sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})) + C\end{aligned}$$

积分后 a 的次数增加一次

数学分析A1期中考试安排如下:

时间: 2023年11月19日(星期日) 晚上7:00—9:00.

地点: 5教202教室

考试内容: 教材前三章, 去掉混沌理论.

数学分析(A1), 第28次课

任广斌(中国科大)

2023-11-20

本次课主要内容

- 积分的计算

微积分基本定理

$$C^1[a, b]/\mathbb{R} \begin{matrix} \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \\ \xleftarrow{\int_a^x} \end{matrix} C[a, b]$$

- 实数: 有理数—曲边梯形面积: 规则图形面积
- 极限用于扩大人类知识: 从简单到复杂, 从规则到不规则.
- 极限是质变的数学实现.

为何有两种积分？两种积分具有什么关系？

- 原函数不唯一，由此产生不定积分(原函数全体)
- 定积分(变上限积分)是原函数中的典型代表：

$$\int f(x)dx \Longleftrightarrow \int_a^x f(t)dt + c$$

不定积分的作用

- 不定积分与变上限定积分本质相同
- 定积分的计算归结于不定积分的计算
- 不定积分的计算来自于导数公式的反转

§2积分的计算

- 计算积分的原理: 微积分基本定理

$$\begin{array}{ccc} C^1[a, b]/\mathbb{R} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{积分}} \\ \xleftarrow{\text{求导}} \end{array} & C[a, b] \\ \\ F & \xrightarrow{\text{求导}} & f \quad \text{求导公式, 熟知} \\ \\ F & \xleftarrow{\text{积分}} & f \quad \text{积分公式, 反转求导公式} \end{array}$$

- 已知 F, f 和双方对应:

从一个方向看是求导公式, 从另一方向看是积分公式.

求导公式=微分公式= 积分公式

- 求导公式 $\xrightarrow{\text{两边积分}}$ 积分公式

$$\underbrace{F'(x) = f(x)}_{\text{求导公式}} \xrightarrow{\text{两边积分}} \underbrace{F(x) + c = \int f(x) dx}_{\text{积分公式}}.$$

$$\underbrace{(\sin x)' = \cos x}_{\text{求导公式}} \xrightarrow[\text{积分是-1阶导数}]{\text{两边积分}} \underbrace{\int \cos x dx = \sin x + C}_{\text{积分公式}}.$$

求导公式=微分公式=积分公式(续)

- 微分公式 $\xrightarrow{\text{两边积分}}$ 积分公式

$$\int \cos x dx \xrightarrow[\text{微分公式}]{\text{两边积分}} \int d \sin x = \sin x + C.$$

- 站在积分角度看待积分的计算

积分的计算是利用微分公式.

- 积分的计算具体过程

$$\int f(x) dx \xrightarrow{\text{只要处理微分}} \int dF(x) \xrightarrow{\text{导数积分同归于尽}} F(x) + c$$

验证不定积分结果

- 验证不定积分结果的方法:

两边求导

积分的线性性

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int \lambda f(x)dx \stackrel{\text{常数}\lambda}{=} \lambda \int f(x)dx + C$$

计算积分的两大法宝

- 变量代换
- 分部积分

微分学的公式和积分学的公式的对应

积分学	微分学
变量代换	复合函数求导公式 一阶微分形式不变性
分部积分公式 微积分基本定理另一形式	乘积求导公式

变量代换

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$$\implies \int f(g(x))g'(x)dx \xrightarrow{u=g(x)} \int f(u)du$$

$$= F(u) + C$$

$$= F(g(x)) + C.$$

导数和积分的差别

- 有理函数
 - 有理函数的导数是有理函数
 - 有理函数的不定积分可能不是有理函数
- 初等函数
 - 初等函数的导数是初等函数
 - 初等函数的不定积分可能不是初等函数

初等函数的积分可能积不出来

- 导数公式——积分公式
- 复合函数求导公式:

两个函数的导数决定其复合函数的导数

- 复合函数求导公式——积分的变量代换公式:

$$\int f(g(x)) \underbrace{g'(x)}_{\text{多出一项}} dx = F(g(x)) + C.$$

两个函数的积分不能决定其复合函数的积分

复合函数求导公式特例

记 F 是 f 的原函数

$$\int f(\ln x) \frac{1}{x} dx = F(\ln x) + C$$

$$\int f(\sin x) \cos x dx = F(\sin x) + C$$

$$\int f(\tan x) \sec^2 x dx = F(\tan x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$$

利用变量代换计算积分例题

$$\int \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2} dx$$

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$\int \frac{x \cos x - \sin x}{x^2 \sqrt{1 - \frac{\sin^2 x}{x^2}}} dx$$

$$\int \frac{1}{1 + e^x} dx$$

利用变量代换计算积分例题

$$\int \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2} dx \stackrel{u = \frac{\ln x}{x}}{=} \int \frac{1}{(1 - u)^2} du$$

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \stackrel{u = \sqrt{x}}{=} 2 \int \sin u du$$

$$\int \frac{x \cos x - \sin x}{x^2 \sqrt{1 - \frac{\sin^2 x}{x^2}}} dx \stackrel{u = \frac{\sin x}{x}}{=} \int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du$$

$$\int \frac{1}{1 + e^x} dx \stackrel{u = e^x}{=} \int \frac{1}{u(1 + u)} du$$

利用变量代换计算积分例题(续)

$$\int \frac{1}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx$$

$$\int \frac{x^2}{(1-x)^{2020}} dx$$

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$$

利用变量代换计算积分例题(续)

$$\int \frac{1}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx \xrightarrow{u=\tan x} \int \frac{1}{a^2 u^2 + b^2} du$$

$$\int \frac{x^2}{(1-x)^{2020}} dx \xrightarrow{u=1-x} - \int \frac{(1-t)^2}{t^{2020}} dt$$

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \xrightarrow{u=\arctan x} \int u du$$

分部积分公式

- 分部积分公式的作用:

山重水复疑无路, 柳暗花明又一村

$$\int f(x)dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)df(x)$$

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

利用分部积分公式计算积分例题

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{a^2 - (a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) + C\end{aligned}$$

利用分部积分公式计算积分例题

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx \stackrel{\substack{x=a \sin t \\ |t| < \frac{\pi}{2}}}{=} \int a^2 \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int 1 + \cos(2t) dt$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) + C$$

利用分部积分公式计算积分例题(续)

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 + x^2} dx &= x \sqrt{a^2 + x^2} - \int \frac{(a^2 + x^2) - a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(x \sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) \right) + C\end{aligned}$$

利用分部积分公式计算积分例题(续)

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx \stackrel{x=asht}{=} \int a^2 \operatorname{ch}^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int 1 + \operatorname{ch}(2t) dt$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2t \right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(\ln \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a} + \frac{x}{a} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} \right) + C$$

利用分部积分公式计算积分例题(续)

$$\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad (\text{奇函数}), \quad \operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad (\text{偶函数})$$

$$\operatorname{ch}^2 t = \frac{\operatorname{ch}(2t) + 1}{2}, \quad \operatorname{sh} 2t = 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t, \quad \operatorname{ch}^2 t = 1 + \operatorname{sh}^2 t$$

$$x = a \operatorname{sh} t \implies (e^t)^2 - 2 \frac{x}{a} e^t - 1 = 0$$

$$\implies e^t = \frac{2 \frac{x}{a} + \sqrt{4 \frac{x^2}{a^2} + 4}}{2}$$

$$\implies t = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}$$

利用分部积分公式计算积分

$$\int (f(x) + f'(x))e^x dx \stackrel{(f(x)+f'(x))e^x = (f(x)e^x)'}{=} f(x)e^x + C$$

利用分部积分公式计算积分

$$\begin{aligned}\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx &= \int \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} \right) e^x dx \\ &= \frac{e^x}{1+x} + C\end{aligned}$$

利用分部积分公式计算积分

$$\begin{aligned}\int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} e^x dx & \quad \quad \quad = \int \frac{1 + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} e^x dx \\ & \quad \quad \quad = \int \left(\tan \frac{x}{2} + \frac{1}{2} (\sec \frac{x}{2})^2 \right) e^x dx \\ & \quad \quad \quad = \left(\tan \frac{x}{2} \right) e^x + C.\end{aligned}$$

f 是严格单调增加连续函数, 其原函数 $F(x)$

$$\implies \int f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + C$$

反函数积分

$$\int f^{-1}(x)dx \quad \Longrightarrow \quad xf^{-1}(x) - \int xdf^{-1}(x))$$

$$\underline{\underline{u=f^{-1}(x)}} \quad xf^{-1}(x) - \int f(u)du$$

$$\underline{\underline{u=f^{-1}(x)}} \quad xf^{-1}(x) - F(u) + C = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + C$$

求解 f : 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 原函数, $F(1) = 1$, 而且满足

$$f(x)F(x) = \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}$$

$$F'(x)F(x) = \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}$$

$$\implies \frac{1}{2}F^2(x) = 2 \int \arctan \sqrt{x} d \arctan \sqrt{x} = (\arctan \sqrt{x})^2 + C$$

$$\stackrel{F(1)=1}{\implies} C = \frac{1}{2} - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2$$

计算: $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^k} dx$

- 递推公式: $I_1 = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$

$$I_k = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^k} dx$$

$$= \frac{x}{(x^2 + a^2)^k} - \int x d(x^2 + a^2)^{-k}$$

$$= \frac{x}{(x^2 + a^2)^k} + 2k \int \frac{(x^2 + a^2) - a^2}{(x^2 + a^2)^{k+1}} dx$$

$$= \frac{x}{(x^2 + a^2)^k} + 2k(I_k - a^2 I_{k+1})$$

$$I_{k+1} = \frac{1}{2ka^2} \left(\frac{x}{(x^2 + a^2)^k} + (2k - 1)I_k \right)$$

第28次作业: [5.2] 4(奇)

数学分析(A1), 第29次课

任广斌(中国科大)

2023-11-22

本次课主要内容

- 有理函数的积分

- 积分的计算是基本功.
- 积分的计算原理

$$C^1[a, b]/\mathbb{R} \begin{array}{c} \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \\ \xleftarrow{\int_a^x} \end{array} C[a, b]$$

- 积分的计算具体过程

$$\int f(x) dx \xrightarrow{\text{只要处理微分}} \int dF(x) \xrightarrow{\text{导数积分同归于尽}} F(x) + C$$

§3 有理函数的积分

有理函数 $\xrightarrow[\text{必可积出}]{\text{积分}}$ 初等函数 $\xrightarrow[\text{未必可积出}]{\text{积分}}$ 可能非初等函数

$\int e^{-x^2} dx$ 非初等函数 $\xrightarrow{\text{求导}}$ e^{-x^2} 初等函数

有理函数的分解

有理函数 $\Longleftrightarrow$ 多项式+真分式

真分式 $\Longleftrightarrow$ 型如 $\frac{1}{(x-a)^k}$, $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^j}$ 线性组合.

有理函数的分解

- 多项式因子分解无具体表达式, 只有分解存在性(Galois)
- 分式分解的存在性的证明需要复分析
- 有理函数积分的计算常常需要变量代换和分部积分

真分式分解步骤(复分析)

	实根 a (k 重)	复根成对出现 (k 重)
相应多项式	$x - a$	$x^2 + px + q \quad (p^2 - 4q < 0)$
相应分解	$\sum_{j=1}^k \frac{b_j}{(x - a)^j}$	$\sum_{j=1}^k \frac{A_j x + B_j}{(x^2 + px + q)^j}$

- 真分式可以分解为形如上面真分式的求和

有理函数的积分(1)

- 单根情形:

$$\int \frac{1}{(x-a)^k} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-k}(x-a)^{1-k} + C, & k \neq 1 \\ \ln|x-a| + C & k = 1 \end{cases}$$

有理函数的积分(2)

- 复数根情形:

$$\frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} \quad \xrightarrow{\quad} \quad \frac{A(x + \frac{p}{2}) + (B - \frac{Ap}{2})}{((x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4}))^k}$$
$$\xrightarrow[\substack{u=x+\frac{p}{2} \\ a^2=q-\frac{p^2}{4}>0}]{\quad} \quad \frac{Au}{(u^2 + a^2)^k} + \frac{B_1}{(u^2 + a^2)^k}$$

有理函数的积分(3)

- 复数根情形:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x^2 + a^2)^k} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^k} d(x^2 + a^2) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2(1-k)} (x^2 + a^2)^{1-k} + C, & k \neq 1 \\ \frac{1}{2} \ln |x^2 + a^2| + C & k = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

计算: $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^k} dx$

- 递推公式: $I_1 = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$

$$I_k = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^k} dx$$

$$= \frac{x}{(x^2 + a^2)^k} - \int x d(x^2 + a^2)^{-k}$$

$$= \frac{x}{(x^2 + a^2)^k} + 2k \int \frac{(x^2 + a^2) - a^2}{(x^2 + a^2)^{k+1}} dx$$

$$= \frac{x}{(x^2 + a^2)^k} + 2k(I_k - a^2 I_{k+1})$$

$$I_{k+1} = \frac{1}{2ka^2} \left(\frac{x}{(x^2 + a^2)^k} + (2k - 1)I_k \right)$$

例题1

$$\begin{aligned}\int \frac{x^{n-1}}{x^n + 1} dx & \stackrel{u=x^n}{=} \frac{1}{n} \int \frac{1}{u+1} du \\ & \stackrel{=}{=} \frac{1}{n} \ln |x^n + 1| + C\end{aligned}$$

例题2

$$\int \frac{x^{11}}{x^8 + 3x^4 + 2} dx$$

$$\int \frac{x^{11}}{x^8 + 3x^4 + 2} dx \quad \xrightarrow{u=x^4} \quad \frac{1}{4} \int \frac{u^2}{u^2 + 3u + 2} du$$

$$\frac{u^2}{u^2 + 3u + 2} \quad \xrightarrow{\text{化为带分式}} \quad 1 - \frac{3u + 2}{(u + 1)(u + 2)}$$

$$\xrightarrow{\text{真分式标准分解}} \quad 1 - \left(\frac{-1}{u + 1} + \frac{4}{u + 2} \right).$$

真分式分解技巧

- 待定系数法

$$\frac{3u+2}{(u+1)(u+2)} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u+2}.$$

两边乘以 $u+1$, 再令 $u = -1$.

$$A = \left. \frac{3u+2}{u+2} \right|_{u=-1} = -1$$

比较一次项系数 $A + B = 3 \xrightarrow{A=-1} B = 4.$

真分式分解技巧(Liouville定理)

- 真分式由奇点主部唯一确定(Liouville定理)

$$\frac{3u+2}{(u+1)(u+2)} \sim \begin{cases} \frac{-1}{u+1}, & u \rightarrow -1; \\ \frac{4}{u+2}, & u \rightarrow -2. \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{Liouville}} \frac{3u+2}{(u+1)(u+2)} = \frac{-1}{u+1} + \frac{4}{u+2}.$$

例题3

计算 $\int \frac{1}{x^3 + 1} dx$

例题3续

$$\frac{1}{x^3 + 1} \quad \begin{array}{c} \text{真分式分解} \\ \hline \hline L'Hospital \end{array} \quad \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$
$$A = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^3+1} = \frac{1}{3}.$$

比较分子的二次项和常数项:

$$A + B = 0, \quad A + C = 1 \stackrel{A=\frac{1}{3}}{=} B = -\frac{1}{3}, \quad C = \frac{2}{3}.$$

例题3(续)

$$\frac{x-2}{x^2-x+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{3}{x^2-x+1} \right)$$

$$\int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx = \ln|x^2-x+1| + C$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2-x+1} dx &= \int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} dx \\ &= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arctan \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C. \end{aligned}$$

例题4

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$$

例题4(1)

$$x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$$

$$\begin{aligned}\frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(x + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2} + \frac{1}{(x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2} \right)\end{aligned}$$

例题4(2)

$$\begin{aligned}\frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} &= \frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1 + \sqrt{2}x}{(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} \\ &= \frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{\sqrt{2}x}{x^4 + 1}\end{aligned}$$

$$\int \frac{\sqrt{2}x}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{(x^2)^2 + 1} dx^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(x^2) + C.$$

例题4(3)

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} &= \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{d(x - \frac{1}{x})}{(x - \frac{1}{x})^2 + 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + C = F(x) + C\end{aligned}$$

$$F(x) \stackrel{\text{F可导,必连续}}{=} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{2}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{2}, & x < 0 \end{cases}$$

例题4(4)

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} &= \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{d(x + \frac{1}{x})}{(x + \frac{1}{x})^2 - (\sqrt{2})^2} dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}}{x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}} \right| + C = G(x) + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^4 + 1} dx &= \frac{1}{2} \left(\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx - \int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} (F(x) - G(x)) + C\end{aligned}$$

构造题目

$$\int \frac{1}{x(x^7 + 1)} dx$$

$$\int \frac{8x^7 + 1}{x(x^7 + 1)(x^8 + x + 1)} dx$$

$$\int \frac{1}{x(x^k + 1)} dx$$

$$\int \frac{(k+1)x^k + 1}{x(x^k + 1)(x^{k+1} + x + 1)} dx$$

$$\int \frac{x^{3k-1}}{1 + x^{4k}} dx$$

$$\int \frac{x^{k-1}}{1 + x^{2k}} dx$$

构造题目(1)

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{u+1} &\stackrel{u=x^{-7}}{=} \int \frac{-7x^{-8}}{x^{-7}+1} dx \\ &= -7 \int \frac{1}{x(x^7+1)} dx\end{aligned}$$

构造题目(2)

$$\int \frac{du}{u(u+1)} \quad \underline{\underline{u=x(x^7+1)}} \quad \int \frac{8x^7+1}{x(x^7+1)(x^8+x+1)} dx$$

构造题目(3)

$$\int \frac{du}{u+1} \stackrel{u=x^{-k}}{=} \int \frac{-kx^{-(k+1)}}{x^{-k}+1} dx = -k \int \frac{1}{x(x^k+1)} dx$$

构造题目(4)

$$\int \frac{du}{u(u+1)} \quad \underline{\underline{u=x(x^k+1)}} \quad \int \frac{(k+1)x^k + 1}{x(x^k + 1)(x^{k+1} + x + 1)} dx$$

构造题目(5)

$$\int \frac{du}{u^4 + 1} \stackrel{u=x^{-k}}{=} -k \int \frac{x^{-k-1}}{x^{-4k} + 1} dx = -k \int \frac{x^{3k-1}}{1 + x^{4k}} dx$$

构造题目(6)

$$\int \frac{du}{u^2 + 1} \quad \underline{\underline{u=x^{-k}}} \quad -k \int \frac{x^{-k-1}}{1 + x^{-2k}} dx = -k \int \frac{x^{k-1}}{1 + x^{2k}} dx$$

构造题目(7)

$$\int \frac{du}{u^2 + 1} \stackrel{u=x^k}{=} k \int \frac{x^{k-1}}{1 + x^{2k}} dv$$

第29次作业: [5.3] 奇

数学分析(A1), 第30次课

任广斌(中国科大)

2023-11-24

不定积分的来历

- 微积分基本定理的不定积分解读:

$$C[a, b] \underset{\frac{d}{dx}}{\overset{\int}{\rightleftarrows}} C^1[a, b]/\mathbb{R}$$

- 微积分基本定理的定积分解读:

$$C[a, b] \underset{\frac{d}{dx}}{\overset{\int_a^x}{\rightleftarrows}} C^1[a, b]/\mathbb{R}$$

不定积分的注记

- 不定积分

$$C[a, b] \begin{matrix} \xrightarrow{\int} \\ \xleftarrow{\frac{d}{dx}} \end{matrix} C^1[a, b]/\mathbb{R}$$

- $\int$ 记号缺陷: 不含有区间 $[a, b]$ (类似于导数)
- 约定 $\int f(x)dx$:

函数 f 定义域为 $[a, b]$, 而且 $f \in C[a, b]$

本次课主要内容

- 三角、根式积分

§4三角、根式积分

三角	根式
万能变换	Euler变换

三角、根式积分 $\xrightarrow{\text{借助变量代换、分部积分化简}}$ 有理函数

三角、根式积分的计算常常需要利用变量代换和分部积分公式

万能变换

- 万能变换 $t = \tan \frac{x}{2}$:

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{奇函数}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{偶函数}$$

- 万能变换给出勾股定理整数解

$$a^2 + b^2 = c^2$$

具有整数解:
$$\begin{cases} a = t^2 - 1 \\ b = 2t \\ c = t^2 + 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{N}$$

三角函数的积分

三角函数: $R(x, y)$ 是两个变量的有理函数.

万能变换 $\underline{\underline{t = \tan \frac{x}{2}}}$ 有理函数

$$dx = 2d \arctan t = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

$$\int R(\cos x, \sin x) dx \xrightarrow{t = \tan \frac{x}{2}} \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt$$

三角函数的积分: 在奇偶下简化

三角函数: $R(x, y)$ 是两个变量的有理函数.

$$\int R(\cos x, \sin^2 x) \sin x dx \xrightarrow[\text{关于 } \sin x \text{ 奇}]{t = \cos x} - \int R(t, 1 - t^2) dt$$

$$\int R(\cos^2 x, \sin x) \cos x dx \xrightarrow[\text{关于 } \cos x \text{ 奇}]{t = \sin x} \int R(1 - t^2, t) dt$$

$$\int R(\cos^2 x, \sin^2 x) dx \xrightarrow[\text{关于 } \sin x, \cos x \text{ 偶}]{t = \tan x} \int R\left(\frac{1}{1 + t^2}, \frac{t^2}{1 + t^2}\right) \frac{dt}{1 + t^2}$$

例题1

计算: $\int \frac{dx}{\sin(2x) + 2 \sin x}$

例题1续

$$\text{原式} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sin x(1 + \cos x)} dx$$

$$t = \tan \frac{x}{2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{4} \int \frac{1+t^2}{t} dt \\ &= \frac{1}{4} (\ln |t| + \frac{1}{2} t^2) + C = \frac{1}{4} (\ln |\tan \frac{x}{2}| + \frac{1}{2} \tan^2 \frac{x}{2}) + C \end{aligned}$$

例题1(续)

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{2} \int \frac{\sin x}{\sin^2 x (1 + \cos x)} dx \\ &\stackrel{t=\cos x}{=} -\frac{1}{2} \int \frac{1}{(1-t^2)(1+t)} dt \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(1-t)(1+t)^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{C}{(1+t)^2}$$

$$t = 1 : \quad A = \frac{1}{4}$$

$$t = -1 : \quad C = \frac{1}{2}$$

$$t = +\infty : \quad B = \frac{1}{4}$$

例题2

计算:
$$\int \frac{dx}{3 \sin^2(3x) - 2 \cos^2(3x)}$$

例题2续

$$\text{原式} \quad \underline{\underline{u=3x}} \quad \frac{1}{3} \int \frac{1}{3 \sin^2 u - 2 \cos^2 u} du$$

$$\underline{\underline{t=\tan u}} \quad \frac{1}{3} \int \frac{1}{3t^2 - 2} dt$$

$$\underline{\underline{\quad}} \quad \frac{1}{9} \int \frac{1}{t^2 - (\sqrt{\frac{2}{3}})^2} dt$$

$$\underline{\underline{\quad}} \quad \frac{1}{9} \frac{1}{2\sqrt{\frac{2}{3}}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{\frac{2}{3}}}{t + \sqrt{\frac{2}{3}}} \right| + C$$

$$\underline{\underline{\quad}} \quad \frac{1}{9} \frac{1}{2\sqrt{\frac{2}{3}}} \ln \left| \frac{\tan(3x) - \sqrt{\frac{2}{3}}}{\tan(3x) + \sqrt{\frac{2}{3}}} \right| + C$$

例题3

计算: $\int \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos x} dx, \quad r \in (0, 1), \quad |x| < \pi.$

例题3续

$$\text{原式} \quad \xrightarrow{t=\tan \frac{x}{2}} \int \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt,$$

$$\xrightarrow{\quad} 2(1-r^2) \int \frac{1}{(1+t^2)(1+r^2)-2r(1-t^2)} dt$$

$$\xrightarrow{\quad} 2(1-r^2) \int \frac{1}{(1-r)^2 + t^2(1+r)^2} dt$$

$$\xrightarrow{\quad} 2 \frac{1-r^2}{(1+r)^2} \int \frac{1}{t^2 + (\frac{1-r}{1+r})^2} dt = 2 \arctan\left(\frac{1+r}{1-r} \tan \frac{x}{2}\right) + C$$

反三角函数的积分： 借助变量代换和分部积分简化

计算：

$$\int \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} dx$$

反三角函数的积分：借助变量代换和分部积分简化

$$\begin{aligned} \left(\arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)^2}} \frac{2 \frac{1}{2\sqrt{x}}(1+x) - 2\sqrt{x}}{(1+x)^2} \\ &= \frac{1}{\frac{1-x}{1+x}} \frac{1-x}{(1+x)^2 \sqrt{x}} = \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} d(1+x) \\ &= (1+x) \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} - \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= (1+x) \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} - 2\sqrt{x} + C \end{aligned}$$

例题

计算: $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x-x^2}} dx$

$$(\arcsin \sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

原式 $\stackrel{u=\arcsin \sqrt{x}}{=} 2 \int u du = u^2 + C = (\arcsin \sqrt{x})^2 + C$

根式函数的积分

- 型1: 线性分式的根式, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

$$\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx \xrightarrow{t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}} \text{有理函数的积分}$$

根式函数的积分(续)

- 型2:

$$\int (a+bt)^p t^q dt \xrightarrow{p,q \in \mathbb{Q}} \begin{cases} \text{型1,} & q \in \mathbb{Z} \\ \text{型1, } s = a + bt, & p \in \mathbb{Z} \\ \text{型1, 被积函数} = \left(\frac{a+bt}{t}\right)^p t^{p+q} & p+q \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

根式函数的积分(续)

- 型3:

$$\int x^{\alpha}(a+bx^{\beta})^{\gamma}dx \quad \frac{\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}}{t=x^{\beta}} \quad \text{型2}$$

利用欧拉变换计算椭圆积分

- 椭圆积分与椭圆弧长有关:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx \xrightarrow{\text{欧拉变换}} \text{有理函数的积分}$$

欧拉变换

- 欧拉变换:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} \xrightarrow{\text{欧拉变换}} \begin{cases} t - \sqrt{a}x, & a > 0 \\ tx - \sqrt{c}, & c > 0 \\ t(x - \alpha), & \text{二次多项式两个实根}\alpha, \beta \end{cases}$$

欧拉变换是有理函数变换

- 情形1:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a}x \quad \xrightarrow{a > 0} \quad x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b}$$

- 情形2:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx - \sqrt{c} \quad \xrightarrow{c > 0} \quad x = \frac{2\sqrt{c}t + b}{t^2 - a}$$

- 情形3:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \alpha) \quad \xrightarrow{\text{两实根 } \alpha, \beta} \quad x = \frac{\alpha t^2 - a\beta}{t^2 - a}$$

例题

计算:
$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$$

原式 $\Longrightarrow \int \frac{1}{x^2-1} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx.$

$$t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$\frac{1}{t} dt = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right) dx = -\frac{2}{3} \frac{1}{x^2-1} dx$$

原式 $\Longrightarrow \int -\frac{2}{3} dt = -\frac{2}{3} t + C = -\frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C$

例题

计算: $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})}$

原式 $\xrightarrow{u=x^{1/6}} \int \frac{1}{u^3(1+u^2)} 6u^5 du$

$$\xrightarrow{\quad} 6 \int 1 - \frac{1}{1+u^2} du$$

$$\xrightarrow{\quad} 6(u - \arctan u) + C = 6(x^{1/6} - \arctan x^{1/6}) + C$$

例题

计算: $\int \frac{dx}{x\sqrt{-x^2+x+2}}$

原式 $\xlongequal{\quad\quad\quad} \int \frac{1}{x(x+1)} \sqrt{\frac{x+1}{2-x}} dx, \quad t = \sqrt{\frac{x+1}{2-x}}.$

解法二: $\sqrt{-x^2+x+2} = \sqrt{(2-x)(x+1)} = t(x+1)$

$$t = \sqrt{\frac{2-x}{x+1}}$$

解法三: 倒数变换 $x = \frac{1}{t}$

三角、根式积分方法总结

万能变换、Euler变换

+

变量代换、分部积分

$C[a, b]$ 上微积分的总结

- 涉及函数: 初等函数 $\subset$ 实解析函数 $\subset$ 光滑函数 $\subset$ 连续函数
- 涉及运算: 求导和积分是一对互逆运算

$$C[a, b] \begin{array}{c} \xrightarrow{\int_a^x} \\ \xleftarrow{\frac{d}{dx}} \end{array} C^1[a, b]/\mathbb{R}$$

- 涉及方法:

{	原子分解	(原子分解, 调和分析)
	对偶方法	(分部积分, 广义函数)
	变分方法	(方程视为变分方程, 数学物理)

- 带有积分余项的Taylor公式:

$$T_n(x; x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$$f(x) \stackrel{f \in C^{n+1}[a,b]}{=} T_n(x; x_0) + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt$$

- $n = 0$: 这是Newton-Leibniz公式, 也是微积分基本定理:

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt.$$

- 利用常数变异法证明: 将 x_0 视为变量, 两边对 x_0 的导数相同.

微积分的顶峰(续)

- 带有积分余项的Taylor公式 $\xrightarrow{\text{积分论}}$ Cauchy余项

$$f(x) = T_n(x; x_0) + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \frac{n+1}{p} (1-\theta)^{n+1-p}$$

- $n = 0, p = 1$: 这是Lagrange中值定理

$$f(x) - f(x_0) = f'(\zeta)(x - x_0).$$

积分学的地位

- 在连续函数 $C[a, b]$ 框架下, 求导, 微分, 积分地位等价.

$$C[a, b] \begin{array}{c} \xrightarrow{\int_a^x} \\ \xleftarrow{\frac{d}{dx}} \end{array} C^1[a, b]/\mathbb{R}$$

- 积分记号是象形文字, 背负计算方法:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\zeta_i) \Delta x_i$$

$$F'(x) = f(x) \iff dF(x) = f(x)dx \iff \int f(x)dx = \int dF(x) = F(x) + C.$$

微积分是仿生学

- 微积分以极限为触角极大地扩充人类的知识.

	$\mathbb{Q} : \mathbb{R}$
微分学	多项式 : 初等函数
积分学	阶梯函数 : Riemann可积函数
实分析	特征函数 : Lebesgue可积函数
泛函分析	光滑函数 : 广义函数

微积分的扩充

微分学 $\Longrightarrow$ 流形上分析, 纤维丛理论

积分学 $\Longrightarrow$ 实分析

第30次作业:

[5.4] 1 (3) (7)

[5.4] 2 (1) (6) (10)

数学分析(A1), 第31次课

任广斌(中国科大)

2023-11-27

本次课主要内容

- 定积分

第六章: 定积分

- 不定积分归结于面积给出的原函数

$$\underbrace{\int f(x)dx}_{\text{全部原函数}} = \underbrace{\int_a^x f(t)dt}_{\text{一个原函数(面积)}} + C$$

至此不定积分完成历史使命:

- 不定积分归结于研究变上限积分

$$\int_a^x f(t)dt$$

- 研究变上限积分只需要研究积分

$$\int_a^b f(t)dt.$$

微积分基本定理的解读: 不定积分由变上限积分代替

- 微积分基本定理的不定积分解读:

$$C[a, b] \xrightleftharpoons[\frac{d}{dx}]{\int} C^1[a, b]/\mathbb{R}$$

- 微积分基本定理的定积分解读:

$$C[a, b] \xrightleftharpoons[\frac{d}{dx}]{\int_a^x} C^1[a, b]/\mathbb{R}$$

- 积分理论的首次推广: 曲边梯形的面积有意义,有定义.

连续函数理论 $\xRightarrow{\text{扩大}}$ Riemann可积函数理论

- 积分理论的再次推广：曲边梯形的面积的推广，对 y 轴剖分.

Riemann可积函数理论 $\xRightarrow{\text{完备化}}$ Lebesgue可积函数理论

$\Longrightarrow$ 实分析

- 积分理论的其它推广： 算子值的积分理论

====> 泛函分析

在扩充的积分论中, 求导和积分不再等价.

- 积分将一骑绝尘而去:

Riemann 积分 $\subset$ Lebesgue 积分 $\subset$ 抽象积分理论.

- 在纤维丛上的微积分中, 求导和积分联手为分析做贡献.

微积分的核心秘密

- 微积分的实质:

局部: 利用的简单、规则取代复杂、不规则。

整体: 局部的连续叠加.

微积分的威力在于极限

微元法
直接上切线
逼近极限二合一

$$\frac{dy}{dx}$$

没有逼近过程

点态变化率
具体实现

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

逼近过程

微元法

$$\int_a^b f(x) dx$$

没有逼近过程

积少成多
具体实现

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \Delta x_i$$

逼近过程

曲边梯形面积的定义

局部是规则的面积, 极限过程产生整体面积.

- 分割: $\pi: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$

$$\|\pi\| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i.$$

- 求和:

$$\sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \Delta x_i, \quad \zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

- 取极限:

$$\text{面积} = \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \Delta x_i$$

面积定义中的极限的 $\epsilon - \delta$ 精确定义

若存在 $I \in \mathbb{R}$, 使得对 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $\|\pi\| < \delta$ 时, 有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \Delta x_i - I \right| < \epsilon, \quad \forall \zeta_i \in [x_{i-1}, x_i],$$

则称 I 为Riemann和 $\sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \Delta x_i$ 当 $\|\pi\| \rightarrow 0$ 时的极限, 记为

$$I = \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \Delta x_i.$$

- 称极限值 I 为 f 在 $[a, b]$ 上的Riemann积分或定积分,
- 称 f 在 $[a, b]$ 上Riemann可积.

定积分的符号解释

- $R[a, b] = [a, b]$ 上Riemann可积函数全体.

$$\int_a^b f(x)dx : \stackrel{f \in R[a,b]}{=} \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

$$\underbrace{\int_a^b}_{\text{积分符号}} \underbrace{f(x)}_{\text{被积函数}} \underbrace{dx}_{\substack{x \text{ 是积分变量} \\ \text{是哑标}}}$$

积分表达式

定积分的注记1

- 定积分作为极限与古典极限不同:

$\lim_{\ \pi\ \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \Delta x_i$	$\ \pi\ $ 给定	$\sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \Delta x_i$ 不确定,	π, ζ_i 不确定
$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$	n 给定	a_n 确定	
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	x 给定	$f(x)$ 确定	

定积分的注记2

- 定积分作为极限可以转化为古典极限:

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \Delta x_i \xlongequal[\text{取区间等分, } \zeta_i \text{ 区间端点}]{f \in R[a,b]} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \frac{b-a}{n}$$

- 定积分转化为古典极限, 由此得到定积分的性质.

定积分的注记3

- 定积分作为极限的分割特点:

$\|\pi\| \rightarrow 0 \iff$ 分割越来越细

$\|\pi\| \rightarrow 0 \iff$ 增加分点

定积分的注记4

- 定积分的积分变量是哑标:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du.$$

离散情形 $\sum_{n=1}^m a_n = \sum_{k=1}^m a_k = \sum_{j=1}^m a_j.$

- 不定积分的积分变量不是哑标:

定积分的注记5

- 定积分的几何意义:

$$\int_a^b |f(x)| dx = \text{曲边梯形的面积.}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \text{曲边梯形的代数(带符号)面积.}$$

定积分的注记5

- 定积分可转化为非负函数的定积分:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx$$

$$\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^b f^+(x)dx + \int_a^b f^-(x)dx$$

定积分的注记5

- 可积函数的简化(极限的精髓):

$\mathbb{Q} : \mathbb{R} = \text{多项式} : \text{初等函数} = \text{阶梯函数} : \text{Riemann可积函数}$

- 定积分是有方向积分(第二型曲线积分)

$$\int_a^b := - \int_b^a$$

定积分的注记7

- 定积分与不定积分的关系

$$\int f(x)dx \xrightarrow{f \in C[a,b]} \int_a^x f(t)dt + C$$

- 定积分计算归结于不定积分:

$$\int_a^b f(x)dx = \left(\int_a^x f(t)dt + C \right) \Big|_a^b = \left(\int f(x)dx \right) \Big|_a^b$$

- 积分记号是象形文字, 背负天然的计算方法.

- 狭义积分学 $\Longleftrightarrow$ 微分学:

$$C^1[a, b]/\mathbb{R} \xrightleftharpoons[\text{积分}]{\text{求导}} C[a, b]$$

- 广义积分学 $\Leftrightarrow$ 微分学:

定积分的注记9

- Riemann可积函数 $\Leftrightarrow$ 具有原函数的函数:

	Riemann可积函数	具有原函数的函数
	柔软	刚性
$\chi_{[-1,1]\setminus\{0\}}$	✓	× 不连续, Darboux
$(x^2 \sin \frac{1}{x^2})'$	× 无界	✓

定积分的注记9

- Riemann可积函数 $\Leftrightarrow$ 具有原函数的函数.

- 两类函数脱节的根本原因是涉及两套理论.

- Riemann可积函数的柔软理论:

$R[a, b]/\sim$: 函数允许修改在有限点处的值, 不改变可积性和积分值.

$$f \in R[a, b]/\sim \implies f \text{ a.e.有原函数}, \quad f \stackrel{\text{a.e.}}{=} F'$$

- 具有原函数的函数的刚性理论:

作为古典函数, 不允许修改在任意点处的值, 否则破坏连续性, 破坏具有原函数.

定积分的笔记10

- 微元法:

$$\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{\substack{\text{无逼近} \\ \text{一步到位} \\ \text{直接上切线}}} \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}_{\text{逼近过程}}$$

$$\underbrace{\int_a^b f(t) dt}_{\substack{\text{无逼近} \\ \text{二合一, 一步到位} \\ \text{象形}}} \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \Delta_i}_{\text{逼近过程}}$$

- Riemann可积性定理:

$$f \in R[a, b] \iff f \text{ 在 } [a, b] \text{ 有界, } a.e. \text{ 连续.}$$

定积分的注记12

- Riemann积分非绝对收敛积分.

$$f = \chi_{\mathbb{Q}} - \chi_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}, \quad |f| = 1$$

$$\implies f \notin R[0, 1], \quad |f| \in R[0, 1]$$

- Lebesgue积分是绝对收敛积分.

例题

$$\int_0^a x^2 dx \quad \begin{array}{c} \text{\underline{\underline{n等分}}} \\ \text{\underline{\underline{\zeta_i取右端点}}} \end{array} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}a\right)^2 \frac{a}{n}$$
$$\quad \quad \quad \underline{\underline{\quad \quad \quad}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{a^3}{3}.$$

$$\int_0^a x^2 dx \quad \begin{array}{c} \text{\underline{\underline{计算方法的威力}}} \end{array} \quad \int_0^a d\frac{1}{3}x^2 = \frac{1}{3}a^3.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right)^{1/n}$$

$$= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{n}{n}\right) \right)}$$

$$= e^{\int_0^1 \ln(1+x) dx} = e^{\int_0^1 \ln(1+x) d(x+1)} = \frac{4}{e}.$$

第31次作业:

[6.1] 2 3

数学分析(A1), 第32次课

任广斌(中国科大)

2023-11-29

本次课主要内容

- 微积分基本定理

$$C[a, b] \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{积分}} \\ \xleftarrow{\text{求导}} \end{array} C^1[a, b]/\mathbb{R}$$

$$R[a, b] \xrightarrow[\text{非单射, 无逆}]{\text{积分}} C[a, b]$$

从实分析的观点看待微积分基本定理

$$L^1[a, b]/\sim \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{积分}} \\ \xleftarrow{\text{求导}} \end{array} AC[a, b]/\mathbb{R}$$

$$R[a, b]/\sim \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{积分}} \\ \xleftarrow{\text{求导}} \end{array} R^1[a, b]/\mathbb{R}$$

$$R^1[a, b] = \left\{ f \in C[a, b] : \exists g \in R[a, b], f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt \right\}$$

● 注意:

$$f \in R[a, b], \quad f \stackrel{\text{a.e.}}{=} g \quad \Rightarrow \quad g \in R[a, b]$$

积分性质的出发点: 积分是数列极限

$$f \in R[a, b] \xrightarrow{\text{古典数列极限}} \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}i\right) \frac{b-a}{n}.$$

验证Riemann可积性都归结于Riemann可积性定理.

- Riemann可积性定理 $\implies f \in R[a, b]$.

积分的性质(续)

- 唯一性: $f \in R[a, b] \implies \int_a^b f(x) dx$ 唯一.

积分的性质(续)

- 线性性:

$$\forall f, g \in R[a, b], \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$\implies$

$$\lambda f + \mu g \in R[a, b]$$

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$$

- 可加性:

$$\forall f \in R[a, c], \quad f \in R[c, b], \quad c \in (a, b)$$

$$\implies f \in R[a, b]$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

积分限可加性(续)

证明: 取 $[a, c]$ 的 n 等分分割, $[c, b]$ 的 n 等分分割, 合在一起:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = c < x_{n+1} < x_{n+2} < \cdots < x_{2n} = b$$

$$\xRightarrow{\text{取 } \zeta_i = x_i} \sum_{i=1}^{2n} f(\zeta_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \Delta x_i + \sum_{i=n+1}^{2n} f(\zeta_i) \Delta x_i$$

$$\xRightarrow{\quad} \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

积分限可加性(续)

$$\int_a^b f(x)dx \quad \frac{\text{积分存在的前提下}}{a, b, c \text{ 无大小关系}} \quad \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

连续函数和Riemann可积函数关系

Riemann 可积性定理 $\implies C[a, b] \subset R[a, b]$

Riemann积分的 $\epsilon - \delta$ 精确定义

Definition

$f \in R[a, b] \implies \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 当 } \|\pi\| < \delta \text{ 时, 有}$

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \Delta x_i - \int_a^b f(x) dx \right| < \epsilon$$

对任意的分割 π 和任意的 $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 成立.

记号 $\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$

$$\|\pi\| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

有界性: 证法1

- 存在Riemann和有界:

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \Delta x_i \right| < 1 + \left| \int_a^b f(x) dx \right|, \quad \forall \zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

- 函数在 $[x_0, x_1]$ 有界:

$$\forall \zeta_1 \in [x_0, x_1] \xrightarrow[i=2, \dots, n]{\text{取 } \zeta_i = x_i} |f(\zeta_1)| \leq \frac{1}{\Delta x_1} \left(1 + \left| \int_a^b f(x) dx \right| + \left| \sum_{i=2}^n f(x_i) \Delta x_i \right| \right)$$

- 同理, f 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 有界, 从而在 $[a, b]$ 有界.

有界性: 反证法

- 可设 f 无上界(否则考察 $-f$): $\forall \pi: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$
- 可设 f 在第一个分割区间 $[x_0, x_1]$ 无上界(其它情况类似).
- Riemann和可以任意大:

$\forall M > 0$, 选取 $\zeta_1 \in [x_0, x_1]$, $\zeta_i = x_i (i \neq 1)$:

$$\sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \Delta x_i = f(\zeta_1) \Delta x_1 + \sum_{i=2}^n f(x_i) \Delta x_i \geq M.$$

- $\xRightarrow{\|\pi\| \rightarrow 0} \int_a^b f(x) dx \geq M \rightarrow +\infty$, 矛盾.

$$f \geq 0 \quad \xRightarrow{f \in R[a,b]} \quad \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \quad \xLeftrightarrow{f \in R[a,b], f \geq 0} \quad f \text{ 在连续点处恒为零}$$

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \quad \xLeftrightarrow{f \in R[a,b], f \geq 0} \quad f \stackrel{\text{a.e.}}{=} 0.$$

保序性证明

- $\int_a^b f(x)dx = 0 \xRightarrow{f \in R[a,b], f \geq 0} f \text{ 在连续点处恒为零}$

反证法: 假设 x_0 是 f 连续点, $f(x_0) > 0$

$$\Rightarrow \text{存在 } x_0 \text{ 某邻域 } I \subset [a, b]: \quad f|_I \geq \frac{f(x_0)}{2}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_I f(x)dx \geq \frac{f(x_0)}{2}|I| > 0, \quad \text{矛盾}$$

保序性证明(续)

• $\int_a^b f(x)dx = 0 \quad \xLeftrightarrow{f \in R[a,b], f \geq 0} \quad f \text{ 在连续点处恒为零}$

证明: $\int_a^b f(x)dx \xrightarrow{\text{取 } \zeta_i \text{ 为 } f \text{ 连续点}} \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n f(\zeta_i) \Delta x_i = 0.$

保序性(续)

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \quad \xLeftrightarrow{f \in C[a,b], f \geq 0} \quad f \equiv 0$$

$$\int_a^b f(x)dx > 0 \quad \xLeftrightarrow{f \in C[a,b], f \geq 0} \quad f \text{ 不恒为零}$$

$$f \geq g \xRightarrow{f, g \in R[a, b]} \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx \xLeftrightarrow[f \geq g]{f, g \in R[a, b]} f \stackrel{\text{a.e.}}{=} g.$$

三角不等式

$$f \in R[a, b]$$

反之不成立

$$|f| \in R[a, b], \quad (\text{Riemann可积性定理})$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (\text{积分定义或单调性})$$

微积分基本定理

$$C[a, b] \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{积分}} \\ \xleftarrow{\text{求导}} \end{array} C^1[a, b]/\mathbb{R}$$

$f \in C[a, b] \implies F(x) := \int_a^x f(t) dt$ 是 f 的原函数, 而且

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b dF(x) = F(b) - F(a)$$

- Darboux介值定理 $\xrightarrow[\text{某个函数的导函数}]{\text{连续函数必是}}$ 连续函数介值定理

微积分基本定理证明

$$f \in C[a, b] \implies f \text{ 在 } [a, b] \text{ 一致连续}$$

$$\implies \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 当 } |x - t| < \delta, \text{ 而且 } x, t \in [a, b] \text{ 时, 有}$$

$$|f(x) - f(t)| < \epsilon.$$

$$\begin{aligned} |F'(x) - f(x)| &= \left| \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} (f(t) - f(x)) dt \right| \\ &\leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} |f(t) - f(x)| dt \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

- Newton-Leibniz公式给出积分计算方法:

$$\int_a^b f(x)dx \xrightarrow[\text{f具有原函数}]{f \in R[a,b]} F(b) - F(a)$$

- 积分计算归结于原函数、不定积分
- Riemann积分理论以连续函数积分理论为基础

Newton-Leibniz公式是带积分余项的Taylor公式

- F 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导, $F' \in R[a, b]$, 则

$$F(b) = F(a) + \int_a^b F'(x)dx$$

$$F(b) \xrightarrow{F' \text{ 逐点存在}, F' \in R[a, b]} F(a) + \int_a^b F'(x)dx$$

- $F' \in R[a, b] \implies \int_a^b F'(x)dx$ 积分确定
- F' 逐点存在 $\implies F(a), F(b)$ 确定不能被修改

Newton-Leibniz的连续版本

- 连续版本:

$$\underbrace{\int_a^b \underbrace{\underbrace{F'(x)}_{\text{变化率}}}_{\text{绝对变化量}} dx}_{\text{绝对变化量净积累}} = F(x) \Big|_a^b$$

Newton-Leibniz公式离散版本

- 离散版本：裂项求和

$$\sum_{i=1}^n \underbrace{\underbrace{\frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}}_{\text{变化率}} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\text{绝对变化量}}}_{\text{绝对变化量净积累}} = F(b) - F(a)$$

Newton-Leibniz公式的证明

假设 F 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导, $F' \in R[a, b]$, 则

$$F(b) - F(a) \quad \xrightarrow{\underline{\underline{[a, b]n\text{等分}}}} \quad \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1}))$$

$$\quad \xrightarrow{\underline{\underline{Lagrange}}} \quad \sum_{i=1}^n F'(\zeta_i) \Delta x_i$$

$$\quad \xrightarrow{\underline{\underline{\|\pi\| \rightarrow 0}}} \quad \int_a^b F'(x) dx$$

第32次作业:

[6.1] 4 7

[6.2] 1 2 8 10

数学分析(A1), 第33次课

任广斌(中国科大)

2023-12-1

本次课主要内容

- 积分中值定理

积分中值定理

Theorem (积分第一中值定理)

$$\int_a^b f(x) \underbrace{g(x)dx}_{\text{正测度}} \underset{\substack{f \in C[a,b], g \in R^+[a,b] \\ \exists \zeta \in [a,b]}}{=} f(\zeta) \int_a^b g(x)dx$$

注1: 在 $f, g \in C[a, b]$, $g > 0$ 的假设下, 可取中值为内点 $\zeta \in (a, b)$.

注2: $R^+[a, b] = \{f \in R[a, b] : f \geq 0\}$.

积分中值定理注记: 积分两个特性:

- 积分增强光滑性
- 积分是一种平均:
 - 概率测度:

$$d\mu(x) = \frac{g(x)}{\int_a^b g(t)dt} dx \text{ 是概率测度}$$

- 概率测度的离散版本是加权平均.
- 关于概率测度具有积分平均:

$$\int_a^b f(x) d\mu(x) \stackrel{\exists \zeta \in [a,b]}{=} f(\zeta)$$

积分中值定理的本质:

- 积分中值定理是将混合物分离方法.

积分中值定理的条件注记

- 积分中值定理的条件不能减弱:

中值	加权
连续	非负
$f \in C[a, b]$	$g \geq 0$

积分中值定理的条件注记

- 积分中值定理对于 $g > 0$ 成立 $\implies$ 对于 $g \geq 0$ 成立

$$\int_a^b f(x) \left(g(x) + \frac{1}{n} \right) dx \stackrel{\zeta_n \in [a, b]}{=} f(\zeta_n) \int_a^b \left(g(x) + \frac{1}{n} \right) dx$$

不妨设 $\zeta_n \rightarrow \zeta_0 \in [a, b]$, 在上式中令 $n \rightarrow \infty$ 即可.

介值定理 $\implies$ 积分中值定理

$$\int_a^b f(x) d\mu(x) \in [f_{\min}, f_{\max}] = f[a, b]$$

$$\xRightarrow{\exists \zeta \in [a, b]} f(\zeta) = \int_a^b f(x) d\mu(x).$$

微分中值定理 $\iff$ 积分中值定理

- 假设 $f, g \in C[a, b]$, $g > 0$.

$$H(x) = \int_a^x f(t)g(t)dt, \quad G(x) = \int_a^x g(t)dt.$$

$$\text{Cauchy中值定理} \quad \frac{H(b) - H(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{H'(\zeta)}{G'(\zeta)}$$

$$\iff \text{积分中值定理} \quad \frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)dt} = f(\zeta)$$

积分中值定理的条件

- 利用微分中值定理证明积分中值定理:

$f \in C[a, b]$ 可代之以 $f \in R[a, b]$, fg, g 有原函数.

积分中值定理=变分等式

- 变分方程

$$F'(\zeta) = 0$$

- 辅助函数:

$$F(x) = \int_a^x fg \int_a^b g - \int_a^b fg \int_a^x g.$$

- 在 $f, g \in C[a, b]$, $g > 0$ 的假设下, 可取中值为内点 $\zeta \in (a, b)$.

微分中值定理=积分中值定理=变分等式

- 微分中值定理:

$$F(b) - F(a) \xrightarrow[\exists \zeta \in (a, b)]{F \in C[a, b] \atop F' \text{ 在 } (a, b) \text{ 存在}} F'(\zeta)(b - a)$$

- 微分中值定理~~=====~~N-L公式积分中值定理:

$$\int_a^b f(x) dx \xrightarrow{f \in R[a, b] \text{ 具有原函数}} f(\zeta)(b - a)$$

- 积分中值定理~~=====~~微分中值定理变分等式:

$$\left((b - a) \int_a^x f(t) dt - (x - a) \int_a^b f(t) dt \right)' = 0.$$

积分第二中值定理

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{权函数}} g(x) dx \xrightarrow[\substack{\text{f 单调减非负} \\ \exists \zeta \in [a, b]}]{f, g \in R[a, b]} \underbrace{f(a)}_{\text{最大值}} \underbrace{\int_a^\zeta}_{\text{中值在积分限}} g(x) dx$$

积分中值定理是分离工具.

积分第二中值定理的离散版本

Theorem (Abel引理)

$$\epsilon_k \geq 0, \quad \searrow, \quad u_k \in \mathbb{R}, \quad \forall k = 0, 1, \dots, n$$

$$\implies \sum_{k=0}^n \underbrace{\epsilon_k}_{\text{加权}} u_k \in \underbrace{\epsilon_0}_{\text{最大值}} \left[\min_{0 \leq k \leq n} \sum_{i=0}^k u_i, \max_{0 \leq k \leq n} \sum_{i=0}^k u_i \right].$$

积分中值定理是分离工具.

分部求和公式

$$\sum_{k=0}^n \epsilon_k (S_k - S_{k-1}) \xrightarrow[\epsilon_{n+1} = 0, S_{-1} = 0]{\text{在求和指标以外零扩充}} - \sum_{k=0}^n (\epsilon_{k+1} - \epsilon_k) S_k$$

$$\begin{aligned} \text{证明: 左边} &= \epsilon_n S_n - \epsilon_0 S_{-1} + \sum_{k=0}^{n-1} (\epsilon_k - \epsilon_{k+1}) S_k \\ &= \epsilon_{n+1} S_n - \epsilon_0 S_{-1} + \sum_{k=0}^n (\epsilon_k - \epsilon_{k+1}) S_k = \text{右边} \end{aligned}$$

Abel引理的证明

$$\text{证明: } \sum_{k=0}^n \epsilon_k u_k \quad \xrightarrow{\underline{u_k = S_k - S_{k-1}}} \quad \sum_{k=0}^n \epsilon_k (S_k - S_{k-1})$$

$$\xrightarrow{\underline{\text{分部求和}}} \quad \sum_{k=0}^n (\epsilon_k - \epsilon_{k+1}) S_k$$

$$\in \quad \epsilon_0[m, M]$$

积分第二中值定理的证明(1)

$$\forall \pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad \forall \zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

积分第二中值定理的证明(2)

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x) dx - \int_a^b f(x) g(x) dx \right|$$

$$= \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(\zeta_i) - f(x)) g(x) dx \right|$$

$$\leq \sup_{x \in [a, b]} |g(x)| \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i$$

$$\xrightarrow{\|\pi\| \rightarrow 0} 0.$$

可积充要条件

积分第二中值定理的证明(3)

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)dx$$

$$\stackrel{\text{Abel引理}}{\in} f(a) \left[\min_{c \in [a,b]} \int_a^c g(x)dx, \max_{c \in [a,b]} \int_a^c g(x)dx \right]$$

$$\implies \int_a^b f(x)g(x)dx \stackrel{\text{介值定理}}{=} f(a) \int_a^{\zeta} g(x)dx$$

积分第二中值定理的另一证明

- 积分第二中值定理不依赖于Abel引理的证明. 需要加强条件:

$$f \in C^1[a, b], \quad g \in C[a, b], \quad f \geq 0 \searrow$$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \quad \quad \quad \int_a^b f(x)dG(x), \quad G(x) = \int_a^x g$$

分部积分

$$f(b)G(b) - \int_a^b Gf'$$

积分中值

$$f(b)G(b) + (f(a) - f(b))G(\zeta)$$

$$\in f(a) \left[\min_{[a,b]} G, \max_{[a,b]} G \right]$$

介值定理

$$f(a) \int_a^\zeta g.$$

积分第二中值定理的单调增加版本

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{权函数}} g(x) dx \xrightarrow[\substack{f \text{ 单调增非负} \\ \exists \zeta \in [a, b]}]{f, g \in R[a, b]} \underbrace{f(b)}_{\text{最大值}} \underbrace{\int_{\zeta}^b}_{\text{中值在积分限}} g(x) dx$$

积分第二中值定理的单调增加版本(续)

- 证明同 $f \searrow$.

- 证法2:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x)dx & \quad \quad \quad \int_a^b f(b+a-t)g(b+a-t)dt \\ & \quad \quad \quad \frac{F(x):=f(b+a-x)}{G(x):=g(b+a-x)} \int_a^b F(x)G(x)dx \\ & \quad \quad \quad \underline{\underline{\text{第二中值}}} \quad F(a) \int_a^\eta G(t)dt \\ & \quad \quad \quad \underline{\underline{\quad \quad \quad}} \quad f(b) \int_\zeta^b g(x)dx \end{aligned}$$

积分第二中值定理的单调版本

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \underset{\substack{f, g \in R[a, b] \\ f \text{ 单调} \\ \exists \zeta \in [a, b]}}{=} f(a) \int_a^\zeta g(x)dx + f(b) \int_\zeta^b g(x)dx$$

积分第二中值定理的单调版本续

证明: $f(x) - f(b) \geq 0 \searrow$

$$\int_a^b (f(x) - f(b))g(x)dx = (f(a) - f(b)) \int_a^\eta g(x)dx$$

移项即可.

带积分余项的Taylor展开(微分学顶峰)

假设 $f^{(n+1)}$ 在 $[a, b]$ 上存在, $f^{(n+1)} \in R[a, b]$, 则

$$f(x) = T_n(x; x_0) + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

$$T_n(x; x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

带积分余项的Taylor展开(续)

- 条件: $f^{(n+1)}$ 在 $[a, b]$ 上存在, $f^{(n+1)} \in R[a, b]$.

在边界点处 $f^{(n+1)}$ 存在, 可减弱为在边界点处 $f^{(n)}$ 连续.

带积分余项的Taylor展开证明

- 固定 x , 令变量 $t := x_0$

$$\frac{d}{dt} \left(f(x) - T_n(x; t) \right) = -f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} \in R[a, b]$$

N-L公式
 $\xRightarrow{\text{两边积分}}$

带积分余项的Taylor公式成立

- $\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$ 带积分余项的Taylor展开:

$$\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \frac{\text{关于 } x_0 \text{ 求导验证}}{\text{问:为何对 } x_0 \text{ 求导}} \quad \int_{x_0}^x \frac{(x - t)^n}{n!} dt$$

积分余项 $\implies$ 微分余项

$$R_n(x) \implies \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

$$\implies \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\zeta) (x-\zeta)^{n+1-p} \int_{x_0}^x (x-t)^{p-1} dt$$

$$\implies \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \frac{n+1}{p} (1-\theta)^{n+1-p}$$

$p = n + 1$, Lagrange 余项

第33次作业:

[6.2] 3 5 9

[6.3] 2 3 5

数学分析(A1), 第34次课

任广斌(中国科大)

2023-12-4

本次课主要内容

- 微积分基本定理

微积分基本定理

$$C[a, b] \xrightleftharpoons[\frac{d}{dx}]{\int_a^x} C^1[a, b]/\mathbb{R}$$

- $f \in C[a, b] \implies F(x) = \int_a^x f \in C^1[a, b]$

$$F' = f.$$

- $F \in C^1[a, b] \implies F' \in C[a, b]$

$$\int_a^x F'(t) dt \stackrel{N-L}{=} F(x) - F(a).$$

积分理论的推广

$$R[a, b] \xrightarrow[\text{非单射, 非逆}]{\int_a^x} C[a, b]$$

§3 微积分基本定理

$$f \in R[a, b] \implies \int_a^x f(t) dt \in C[a, b]$$

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' \stackrel{\text{a.e.}}{=} f(x)$$

等号在 f 的连续点处成立.

- 连续性:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$|F(x + \Delta x) - F(x)| = \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \right| \leq M|\Delta x| \rightarrow 0.$$

- 可导性:

在 f 的连续点 x_0 处:

$\forall \epsilon, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$, $x, x_0 \in [a, b]$ 时, $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right| \leq \epsilon$$

Lebesgue积分意义下的微积分基本定理

$$L^1[a, b] / \sim \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\int_a^x} \\ \xleftarrow{\frac{d}{dx}} \end{array} \quad AC[a, b] / \mathbb{R}$$

Riemann积分意义下的微积分基本定理

$$R[a, b] / \sim \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\int_a^x} \\ \xleftarrow{\frac{d}{dx}} \end{array} \quad R^1[a, b] / \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} R^1[a, b] & \quad \equiv \quad \text{Range} \int_a^x \\ & \quad \equiv \quad \left\{ f \in C[a, b] : \exists g \in R[a, b], f(x) = f(a) + \int_a^x g \right\} \end{aligned}$$

- $$f \in R[a, b] \implies \int_a^x f \in R^1[a, b]$$

$$\left(\int_a^x f \right)' \stackrel{\text{a.e.}}{=} f.$$

- $$F \in R^1[a, b] \implies \exists g \in R[a, b], F(x) = F(a) + \int_a^x g$$

$$L^1[a, b] \ni F' \stackrel{a.e.}{=} g \in R[a, b].$$

$$\int_a^x F'(t)dt \stackrel[\text{微积分基本定理}]{\text{Lebague}} F(x) - F(a).$$

- 对于a.e.有定义的函数:

无法确定Riemann可积性, 只能确定Lebesgue可积性.

$$f \in R[a, b], \quad f \stackrel{\text{a.e.}}{=} g \quad \Rightarrow \quad g \in R[a, b]$$

$$f \in R[a, b], \quad f \stackrel{\text{a.e.}}{=} g \quad \Rightarrow \quad g \in L^1[a, b]$$

$$\int_a^b f' \overset{f'}{\leq} f(b) - f(a)$$

对Cantor函数“ $<$ ”成立.

Sobolev空间

$$W^{1,1}[a,b] := \left\{ F \in C[a,b] : F' \text{ 在 } (a,b) \text{ 存在, } F' \in R[a,b] \right\}$$

Newton-Leibniz公式续

$$\int_a^x F' \stackrel{F \in W^{1,1}[a,b]}{=} F(x) - F(a)$$

假设 $F \in R^1[a, b]$:

$$\int_a^x F'(t) dt \stackrel{F \in R^1[a, b]}{=} F(x) - F(a)$$

$$\frac{d}{dx} \int_a^x F(t) dt \stackrel{\text{a.e.}}{=} F(x)$$

$$\int_a^x \operatorname{sgn}\left(t - \frac{a+b}{2}\right) dt \in R^1[a, b] \setminus W^{1,1}[a, b].$$

该连续函数以 a, b 为零点, 在 $x = \frac{a+b}{2}$ 两侧导数分别为 $+1, -1$.

由Lebegue积分理论给出的微积分基本定理使用范围= $R^1[a, b]$

由Riemann积分理论给出的微积分基本定理使用范围= $W^{1,1}[a, b]$

具有原函数的非连续函数

$$R[0, 1] \setminus C[0, 1] \ni f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

具有原函数的非连续函数

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

具有原函数 $F(x)$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \sin \frac{1}{t} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^x t^2 d \cos \frac{1}{t} \\ &= x^2 \cos \frac{1}{x} - \int_0^x \underbrace{2t \cos \frac{1}{t}}_{\text{连续函数}} dt \end{aligned}$$

$$F'(x) \stackrel{\text{在 } f \text{ 连续点}}{=} f(x), \quad F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = 0 = f(0).$$

Riemann可积函数和具有原函数的函数不同

$$f \in R[a, b] \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ 有原函数}$$

- 不能作为导函数(Darboux) : $\chi_{[-1,1] \setminus \{0\}}$

- 无界 : $\left(x^2 \sin \frac{1}{x^2}\right)'$

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = 0, \quad F'(x) \stackrel{x \neq 0}{=} 2x \sin \frac{1}{x^2} - 2 \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x^2}.$$

变上限积分求导公式

- 假设

$u : I \rightarrow [a, b]$ 可导

$v : I \rightarrow [a, b]$ 可导

$f(\cdot, x) \in C[a, b], \quad \forall x \in I$

$f(t, \cdot) \in C^1(I), \quad \forall t \in [a, b]$

$$\begin{aligned} & \left(\int_{v(x)}^{u(x)} f(t, x) dt \right)' \\ \hline & f(u(x), x)u'(x) - f(v(x), x)v'(x) + \int_{v(x)}^{u(x)} f'_x(t, x) dt. \end{aligned}$$

不妨设 $v(x) \equiv a$.

$$\text{令} \quad g(u, w) = \int_a^u f(t, w) dt$$

$$\frac{d}{dx} g(u, w) \stackrel{\substack{u=u(x), w=w(x) \\ \text{链式法则}}}{=} g'_u u' + g'_w w'.$$

$$g'_u = f(u, w), \quad g'_w = \int_a^u f'_w(t, w) dt$$

Taylor展开多重积分余项

$$\int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x_1} \cdots \int_{x_0}^{x_n} f^{(n+1)}(t) dt dx_n \cdots dx_1.$$

Taylor展开多重积分余项

上式等价于(关于 x_0 求导)

$$-\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n+1)}(x_0) \stackrel{\substack{\text{a.e.} \\ \forall f}}{=} \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x_1} \cdots \int_{x_0}^{x_{n-1}} -f^{(n+1)}(x_0) dx_n \cdots dx_1.$$

上式等价于

$$\frac{(x-x_0)^n}{n!} \stackrel{\text{归纳法}}{=} \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x_1} \cdots \int_{x_0}^{x_{n-1}} dx_n \cdots dx_1.$$

- 这是原式: n 换为 $n-1$, 取 $f^{(n)} = 1$.
- 此式是 $\frac{(x-x_0)^n}{n!}$ 展开到 $n-1$ 次多项式.

Taylor展开多重积分余项

假设 $f^{(n+1)}$ 在 $[a, b]$ 上存在, $f^{(n+1)} \in R[a, b]$, 则

$$\begin{aligned} f(x) &= T_n(x; x_0) + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \\ &= T_n(x; x_0) + \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x_1} \cdots \int_{x_0}^{x_n} f^{(n+1)}(t) dt dx_n \cdots dx_1. \end{aligned}$$

$$T_n(x; x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Cauchy不等式

$$f, g \in R[a, b] \implies |\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|.$$

$$\mathbb{R}^n \quad \left| \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \right.$$

$$R[a, b] \quad \left| \quad \|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx} \right.$$

Cauchy不等式续

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt, \quad \|f\|^2 = \langle f, f \rangle$$

$$\left\| \int_a^b fg \right\| \leq \sqrt{\int_a^b f^2} \sqrt{\int_a^b g^2}$$

离散版本: $\left\| \sum a_k b_k \right\| \leq \sqrt{\sum |a_k|^2} \sqrt{\sum |b_k|^2}$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b (f + \lambda g)^2 \\ &= \lambda^2 \int_a^b g^2 + 2\lambda \int_a^b fg + \int_a^b f^2 \end{aligned}$$

$$\Delta = \left(\int_a^b fg \right)^2 - 4 \int_a^b f^2 \int_a^b g^2 \leq 0.$$

等式成立当且仅当 f 和 g 相差常数因子.

- $(R[a, b], \|\cdot\|)$ 约定几乎处处相等为恒等
- $(R[a, b], \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间, 非完备.
- $R[a, b]$ 完备化 $= L^2[a, b]$

带积分余项的Taylor展开(微分学顶峰)

假设 $f^{(n+1)}$ 在 $[a, b]$ 上存在, $f^{(n+1)} \in R[a, b]$, 则

$$f(x) = T_n(x; x_0) + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

$$T_n(x; x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

积分余项 $\implies$ 微分余项

$$R_n(x) \implies \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

$$\implies \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\zeta) (x-\zeta)^{n+1-p} \int_{x_0}^x (x-t)^{p-1} dt$$

$$\implies \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \frac{n+1}{p} (1-\theta)^{n+1-p}$$

$p = n + 1$, Lagrange 余项

第34次作业:

[6.3] 4 6 7 问题4.

数学分析(A1), 第35次课

任广斌(中国科大)

2023-12-6

本次课主要内容

- 分部积分公式 (§4)
- 换元公式 (§4)

分部积分公式

$$\int_a^b f dg \quad \underline{\underline{f, g \in C^1[a, b]}} \quad (fg)|_a^b - \int_a^b g df$$

分部积分公式

- 条件: 所有在积分号中出现的函数要求连续.
- 条件可减弱为:
 - 所有导函数都逐点存在.
 - 在积分号中出现的函数要求Riemann可积.

$$\int_a^b (fg)'(x) dx \quad \underline{\underline{(fg)' \text{ 存在} \in R[a,b]}} \quad (f(x)g(x)) \Big|_a^b$$

分部积分公式(高阶)

$f^{(n+1)}$, $g^{(n+1)}$ 在 $[a, b]$ 存在且 *Riemann* 可积. 则

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x)g^{(n+1)}(x)dx \\ = & \left[f(x)g^{(n)}(x) - f'(x)g^{(n-1)}(x) + \cdots + (-1)^n f^{(n)}(x)g(x) \right]_a^b \\ & + (-1)^{n+1} \int_a^b f^{(n+1)}(x)g(x)dx. \end{aligned}$$

- 导数转嫁一次出现一个负号.
- 边界项第一项=被积函数其中一项导数降一次, 另一项不变.
- 边界项第二项=第一项的修正:

其中一项导数继续降一次, 另一项导数升一次

- 这一过程持续下去,直到导数降到函数; 交错求和.

- 高阶分部积分公式每项都是相同的阶数 $=n$.

积分 $= -1$ 阶, 函数 $= 0$ 阶.

- 交错和与裂项和关系:

交错和 $\xrightarrow{\text{求导}}$ 裂项和

- 证法1:

$$F(x) := f(x)g^{(n)}(x) - f'(x)g^{(n-1)}(x) + \cdots + (-1)^n f^{(n)}(x)g(x)$$

$$\implies F'(x) = f(x)g^{(n+1)}(x) + (-1)^n f^{(n+1)}(x)g(x)$$

$$\int_a^b F'(x)dx \stackrel{\text{F'点点存在且可积}}{=} F(x)\Big|_a^b.$$

- 证法2: 分部积分公式反复使用.

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x)g^{(n+1)}(x)dx \equiv \int_a^b f(x)dg^{(n)}(x) \\ \equiv & \left[f(x)g^{(n)}(x) \right]_a^b - \int_a^b g^{(n)}(x)f'(x)dx \\ \equiv & \left[f(x)g^{(n)}(x) \right]_a^b - \int_a^b f'(x)dg^{(n-1)}(x) \\ \equiv & \left[f(x)g^{(n)}(x) - f'(x)g^{(n-1)}(x) \right]_a^b + \int_a^b g^{(n-1)}(x)f''(x)dx \\ \equiv & \dots \end{aligned}$$

积分换元公式(变量代换公式)

假设 $\varphi : [\alpha, \beta] \longrightarrow [a, b]$ 严格单调增双射, $\varphi \in C^1[\alpha, \beta]$, $f \in C[a, b]$

$$\implies \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

变上限求导

$$\frac{d}{ds} \int_a^{\varphi(s)} f(x) dx = \frac{d}{ds} \int_{\alpha}^s f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

$$\implies \int_a^{\varphi(s)} f(x) dx = \int_{\alpha}^s f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt + C$$

$$C = 0$$

积分换元公式(变量代换公式)

假设 $f \in C[a, b]$, φ' 在 $[\alpha, \beta]$ 存在可积而且

- φ 将边界点映为边界点: $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.
- φ 满足遍历条件: $\varphi[\alpha, \beta] = [a, b]$.

(等价于 $\varphi[\alpha, \beta] \subset [a, b]$)

$$\implies \int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

注记: a, b 没有大小关系, α, β 没有大小关系.

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^x f, \quad (F, \varphi \text{ 可复合}, \varphi[\alpha, \beta] = [a, b])$$

$$(F \circ \varphi)'(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(\varphi(t))\varphi'(t) \in R[a, b]$$

$$\implies \int_a^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} F(x)\Big|_a^b \stackrel{\text{def}}{=} F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta$$

$$\stackrel{\text{N-L}}{\stackrel{\text{def}}{=}} \int_\alpha^\beta (F(\varphi(t)))' dt$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

积分换元公式

假设 $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ 严格单调双射, $\varphi \in C^1[\alpha, \beta]$, 而且

- $f \in R[a, b]$, $f \circ \varphi \in R[\alpha, \beta]$.

$$\implies \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

$$\pi_1 : \quad \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta, \quad \varphi(t_k) = x_k$$

$$\pi_2 : \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) \xrightarrow{\theta_i \in (t_{i-1}, t_i)} \varphi'(\theta_i) \Delta t_i$$

$$\xi_i := \varphi(\theta_i) \in (x_{i-1}, x_i) \quad (\varphi \text{ 严格单调})$$

$$\|\pi_1\| \rightarrow 0 \xrightarrow{\varphi \in C^1[\alpha, \beta]} \|\pi_2\| \rightarrow 0$$

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\varphi(\theta_i)) \varphi'(\theta_i) \Delta t_i$$

$$\implies \int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

π 是无理数

反证: $\pi = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{N}.$

考虑 $[0, \pi]$ 上的函数:

关于中心对称, 非负, $2n$ 次多项式, 在端点处各阶导数为整数

$$f(x) = \frac{q^n}{n!} x^n (\pi - x)^n = \frac{1}{n!} x^n (p - qx)^n$$

考察它的Fourier系数

$$0 < \int_0^\pi f(x) \sin x dx \leq \frac{q^n \pi^{2n}}{n!} \pi \in (0, 1), \quad n \gg 1.$$

$\int_0^\pi f(x) \sin x dx$ 分部积分 f 在原点和 π 点各阶导函数的 $\mathbb{Z}$ -线性组合

例题

计算 $\int_0^{\pi} \frac{x \sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx$

原式记为 I

$$I \stackrel{x = \pi - t}{=} \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t) \sin^3 t}{1 + \cos^2 t} dt = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin^3 t}{1 + \cos^2 t} dt - I$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin^3 t}{1 + \cos^2 t} dt \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos^2 t}{1 + \cos^2 t} d(-\cos t) \\ &= -\frac{\pi}{2} (2 \arctan(\cos t) - \cos t) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} - \pi \end{aligned}$$

- 本例借助不定积分失效
- 定积分计算无需借助不定积分

$$\int_a^b f = \int f \Big|_a^b.$$

- 定积分的计算保留不定积分的计算方法, 即分部积分公式和换元公式, 但甩开不定积分.

f 在 $[a, b]$ 单调增加

$$\underline{\underline{f \in C^1[a, b]}} \implies g(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt \text{ 在 } [a, b] \text{ 单调增加}$$

$$g(a) \quad \text{=====} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad \text{=====} \quad f(a)$$

L'Hospital

$$g'(a) \quad \text{=====} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

$$\text{=====} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\int_a^x (f(t) - f(a)) dt}{(x - a)^2}$$

$$\text{=====} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{2(x - a)} = \frac{f'(a)}{2}$$

L'Hospital

$$g'(x) \quad \underline{\underline{\quad \quad \quad}} \quad \frac{1}{x-a} f(x) - \frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x f(t) dt$$

$$\underline{\underline{\text{积分中值定理}}}$$
$$\xi \in [a, x] \quad \frac{1}{x-a} (f(x) - f(\xi))$$

$$\underline{\underline{\text{微分中值定理}}}$$
$$\eta \in (\xi, x) \quad \frac{x-\xi}{x-a} f'(\eta) \geq 0$$

$$f \text{ 在 } [a, b] \text{ 凸} \implies g(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt \text{ 在 } [a, b] \text{ 凸}$$

$$g(x) \quad \begin{array}{c} \text{=} \\ \text{=} \end{array} \quad \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt$$

$$\begin{array}{c} t = (1-s)a + sx \\ \text{=} \\ dt = (x-a)ds \end{array} \quad \int_0^1 f((1-s)a + sx) ds$$

$$f \text{ 在 } [a, b] \text{ 凸} \implies f \in C(a, b), \quad f \text{ 有界} \implies f \in R[a, b]$$

假设 $x_1 < x_2 < x_3$, 则

$$\frac{g(x_3) - g(x_2)}{x_3 - x_2} = \int_0^1 \frac{f((1-s)a + sx_3) - f((1-s)a + sx_2)}{((1-s)a + sx_3) - ((1-s)a + sx_2)} s ds$$

$$\frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} = \int_0^1 \frac{f((1-s)a + sx_2) - f((1-s)a + sx_1)}{((1-s)a + sx_2) - ((1-s)a + sx_1)} s ds$$

$$\xrightarrow[\text{四点判别法}]{f \text{凸}} \frac{g(x_3) - g(x_2)}{x_3 - x_2} - \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$$

$f \in C[a, b]$ 在 $[a, b]$ 单调增加

$$\implies \int_a^b xf(x)dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx$$

f 单调增加

$$\implies \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\left(f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \geq 0, \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\implies \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)f(x)dx \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)dx = 0$$

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f(x) dx$$

积分第二中值

$$f(a) \int_a^\xi \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx + f(b) \int_\xi^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx$$

$$f(a) \frac{1}{2} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \Big|_a^\xi + f(b) \frac{1}{2} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \Big|_\xi^b$$

$$f(a) \frac{1}{2} (\xi - a)(\xi - b) + f(b) \frac{1}{2} (\xi - a)(b - \xi)$$

$$\frac{1}{2} (\xi - a)(b - \xi)(f(b) - f(a)) \geq 0$$

第35次作业:

[6.4] 1(偶) 6 7 8 9.

数学分析(A1), 第36次课

任广斌(中国科大)

2023-12-8

- 为何导数如此重要？
- 导数、微分、不定积分、定积分的关系如何？
- 为何说“导数和积分是一对互逆运算就是微积分基本定理”？
- 为何说分析是极限的艺术？
- 为何说带积分余项的泰勒展开是微积分顶峰？
- 为何说极限是舍得之法, 是退一步海阔天空法？
- 为何说微积分是仿生学？
- 积分学如何摆脱导数独立发展？

微积分核心

- 微分学奥秘在于双射:

$$C[a, b] \underset{\frac{d}{dx}}{\overset{\int_a^x}{\rightleftarrows}} C^1[a, b]/\mathbb{R}$$

- 极限理论的具体实施通过导数和积分理论实现.

导数和积分脱胎于极限但又不失一般性

极限=级数=关于计数测度的积分=导数

- 为何导数如此重要？

这是因为导数是变化率.

变化率是研究变化的世界最重要, 最有效的工具.

- 导数、微分、不定积分、定积分的关系如何？

- 导数、微分、不定积分、定积分是同一事物的不同侧面.
- 导数是变化率,
- 微分是导数的等价描述, 是函数改变量的主部, 是泰勒展开的线性部分,
- 变上限积分是导数的另一面目, 是导数的逆, 是特定的原函数.
- 不定积分本质上是变上限积分, 相差常数是变上限积分, 是原函数全体.

- 导数和积分的作用是什么？

- 在单变量微积分的万花筒中的素材只有三项：

函数, 导数, 积分.

- 由它们产生丰富多彩的微积分内容.
- 函数是研究的主要对象, 导数和积分是研究函数的重要工具

- 为何说“导数和积分是一对互逆运算就是微积分基本定理”?

- 先求导, 再积分回到函数, 这是牛顿莱布尼兹公式.
- 牛顿莱布尼兹公式是带有积分余项的泰勒公式的雏形.
- 带有积分余项的泰勒公式的一般形式可导出其它泰勒公式:

带有Peano余项, 拉格朗日余项, Cauchy余项.

- 连续性、可导性可表示为带有Peano余项的泰勒展开.

- 微分学中值定理是带有拉格朗日余项的泰勒展开.
- 微分学中值定理与积分学中值定理等价:

这是因为导数与积分等价.

- 先积分, 再求导, 回到函数.
- 特定原函数来自变上限积分.
- 积分作为分割、求和、取极限, 是一复杂的极限, 给出曲边梯形的面积.
- 积分提供原函数, 其计算有牛顿莱布尼兹公式. 积分的计算归结于原函数, 即不定积分.

- 为何说带积分余项的泰勒展开是微积分顶峰？
 - 带积分余项的泰勒展开以牛顿莱布尼兹公式为特例, 可导出众多定理给出初等函数的泰勒级数展开.

- 为何说分析是极限的艺术极限？

- 极限是打破人类认识边界. 将人类认识边界推向无穷的手段. 从有理数到实数, 从多项式到初等函数, 从阶梯函数到连续函数, 极限将人类的认识从简单、常识、规则走到复杂、深奥、非规则情形.
- 极限过程提炼出的差商极限和分割求和取极限, 即导数和积分这一对互逆的运算, 使得对函数的研究如虎添翼
- 例如, 有了导数和积分, 函数就表示为泰勒多项式, 加上积分余项, 泰勒多项式的系数是由导数完全给出, 积分余项由导数和积分给出.

分析是极限的艺术

- 极限是质变的数学语言：等式被弱化为 ϵ 相等.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \quad \Longleftrightarrow \quad a_n \Big|_{n \in U(+\infty)} \stackrel{\epsilon}{=} a$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \Big|_{x \in U(x_0)} \stackrel{\epsilon}{=} f(x_0)$$

- 极限的目标

利用数列 $\xrightarrow{\text{传递唯一——一个数的信息}}$ 数

- 为何说微积分是仿生学？
- 在数的研究中, 有理数的诞生是自然的, 由1经过加减乘除得到. 无理数的发现则困难得多. 这是因为需要通过极限过程. 从有理数才能造出无理数, 最终发现实数可以表示为十进制小数.
- 模仿数的研究可处理函数. 此时起有理数作用的是多项式, 起实数作用的是初等函数.
- 利用导数和积分为工具可得到初等函数的带积分余项的泰勒展开. 估计余项后, 可建立初等函数的泰勒级数展开, 恰如数的十进制表示.

- 关于初等函数的极限理论, 利用泰勒级数理论, 问题可归结于
 - 规则情形下的连续函数极限
 - 非规则情形下的 $\frac{0}{0}$ 型L'Hospital法则, 即有理函数的极限.
- 积分学中相应的理论是从阶梯函数到黎曼可积函数的扩充.

- 为何说极限是舍得之法, 是退一步海阔天空法?

- 极限的定量刻画在人类历史上是短暂的, 其发明是极其困难的, 之前只有定性的刻画, 例如周易关于变化的理论, 以及哲学和宗教对极限的认识.
- 自从有了极限的定量刻画, 才有了瞬时速度, 导数的概念. 它们是 $\frac{0}{0}$ 型极限的雏形. 在一点处瞬时速度依赖于该点时间改变量和相应距离改变量. 在一点处这两者都是零, 此时极限定量刻画之法起着关键作用.
- 一个方法就是先舍后得之法, 就是先退一步后海阔天空之法, 也就是给一定的容忍度得到时间的小的改变量和相应距离改变量产生速度和粗糙量. 极限过程得到瞬时速度的精确值.

- 在曲边梯形面积的计算中也是先退一步, 将问题归结于长方形面积, 得到粗糙的面积值, 极限过程给出精确值.
- 这些过程中代数过程起量变作用, 极限过程起质变作用.
- 以退为进的方法是极限定量刻画的精髓, 是逼近论的精髓.
- 逼近论的典范是带积分余项的泰勒展开. 抓大放小这产生了好加小方法, 是完备化的具体体现.
- 数列极限是用一列数传递唯一一个数的信息的方法. 数列极限的定量刻画采用的是退一步海阔天空法. 对于任意的正数 ϵ , 在无穷远点领域, 数列数列是在 ϵ 误差下的常值数列.

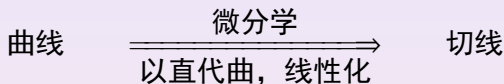
微分的核心秘密(上)

- 曲线 线性化 切线的一丛 $\equiv$ 切丛
- 曲线和切线的全貌

$$\text{切丛} = \bigcup_{(x, f(x)) \in \text{曲线}} (x, f(x)) \text{点处的切线}$$

微分的核心秘密(下)

- 给定曲线，如影随形伴随着一簇切线。从一簇切线的信息提取曲线的信息。



- 涉及两个函数:

曲线	切线
流形	切丛
	(线性子空间=切线平移到原点)

从Taylor展开看微分

微分是Taylor展开的一次项部分。

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{= dy} + \underbrace{o(\Delta x)}_{\text{可忽略}}$$

切线视为一维线性空间=切线平移到原点

微分是直线的方程表示, 该直线过原点平行于切线.

$$\underbrace{dy}_{\text{dy是直线方程的因变量}} = \underbrace{f'(x)}_{\text{x起着参数的作用}} \underbrace{dx}_{\text{dx是直线方程的自变量}}$$

微分的奥秘

- 微分是两个独立变量的函数:

$$dy = f'(x)dx, \quad x, dx \text{ 是两个独立变量.}$$

- dy 总默认为 dx 的线性函数

$$dy = \underbrace{f'(x)}_{\text{伸缩率}} \underbrace{dx}_{\text{新变量}}.$$

dx, dy 具有独立意义. 它们是切空间中的变量和函数

- dx 是切丛上变量, 表示任意的量, 而非小量.

dx 的两重身份: 切丛的自变量; 函数 $f(x) = x$ 的微分

- 微积分的后续发展是什么？

- 后继课程都有微积分的影子. 微分最广场所是流形和纤维丛. 积分最广场所是抽象积分论和测度论. 从而产生流行上微积分, 纤维丛上联络, 巴拿赫空间上微积分, 实分析.

- 极限之后是什么？

- 极限产生的新的对象是继续研究的新的起点、新的垫脚石.
例如由多项式产生初等函数, 初等函数是新起点, 其后果需要承担传承关系.

- 积分学如何摆脱导数独立发展？

- 积分学中，积分从微分学的在野党一跃成为执政党。积分从此单独发展，可撇开导数。
- 黎曼可积函数与连续函数理论比较, 表面上只是跨出一小步, 因为黎曼可积函数当且仅当函数有界, 且几乎处处连续, 实际上它又是很大一步. 这是因为黎曼可积函数类变得柔韧不再刚强
- 改变函数在一点处的值不改变可积性, 不改变函数的积分值.

- 学习微积分有何好方法

- 兴趣

- 如何培养兴趣:

- 问题驱动

- 有哪些好问题？
 - 对宇宙的认识.

- 相对论:

- 时空是Minkowski流形, 需要掌握流形和纤维丛上的微积分.

- 量子力学。

- 量子力学中物理量用Hilbert空间中非有界自伴算子刻画. 泛函分析是出发点.

- 规范场理论.

- 使得曲率达到极小的联络是宇宙规则, 需要研究微分几何.

- 拍X光片:
 - Radon变换是其基础.
- 保密通讯:
 - 椭圆曲线是其基础

- 插值多项式的余项估计

$f \in C^{n-1}[a, b]$, 在 (a, b) n 阶可导, $\{x_i\}_{i=1}^n$ 是 $[a, b]$ 中的不同点, 则

$$f(x) - \underbrace{\sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} f(x_i)}_{\text{Lagrange 插值多项式}} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) \prod_{i=1}^n (x - x_i)$$

- 考察以 $c, x_1, \dots, x_n$ 为不同零点的函数

$$f(x) - \sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} f(x_i) - \frac{f(c) - \sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} \frac{c - x_j}{x_i - x_j} f(x_i)}{\prod_{i=1}^n (c - x_i)} \prod_{j=1}^n (x - x_j)$$

$\implies$ 其 n 阶导数存在零点：

$$f^{(n)}(\xi) - \frac{f(c) - \sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} \frac{c - x_j}{x_i - x_j} f(x_i)}{\prod_{i=1}^n (c - x_i)} n! = 0$$

- 极限过程对于任意 c 成立

例题

$$\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + a_n) \text{收敛} \xLeftrightarrow{a_n > -1} \sum_{n=1}^{+\infty} \log(1 + a_n) \text{收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{收敛}.$$

例子

$$\log(1 + a_n) \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$\xRightarrow{\text{Peano余项}} 1 + a_n = e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2!} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)^2 + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\xRightarrow{\quad} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

$$\xRightarrow{\quad} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) \text{ 发散}$$

$$\xRightarrow{\quad} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 发散}$$

数学分析(A1), 第37次课

任广斌(中国科大)

2023-12-11

本次课主要内容

- Riemann可积充要条件
- Darboux定理

- Riemann可积充要条件

- 本次课总是假设

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{有界}$$

- 分割

$$\pi: \quad a = x_0 < x_1 < \cdots x_n = b$$

$$\|\pi\| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

- 振幅

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$\omega_i = M_i - m_i = f$ 在分割的第 i 个小区间上的振幅

$\omega = f$ 在 $[a, b]$ 上振幅

Riemann可积充要条件

$$f \in R[a, b]$$

$$\iff f \text{ 在 } [a, b] \text{ 有界, } \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = 0$$

- Riemann和

$$S(f, \pi, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n).$$

- Darboux大和

$$S(f, \pi) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

- Darboux小和

$$s(f, \pi) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

- Darboux和消除对于点 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ 的选取的依赖.
- Darboux和不是Riemann和.
- Darboux和是 ϵ 误差下的Riemann和.

- Darboux上积分

$$\overline{\int}_a^b f(x)dx := \inf_{\pi} S(f, \pi)$$

$$\text{Darboux大和} \geq \text{Riemann和} \xrightarrow[\text{包含+收缩}]{\text{极限过程} \|\pi\| \rightarrow 0} \overline{\int}_a^b f(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx$$

- Darboux下积分

$$\int_a^b f(x)dx := \sup_{\pi} s(f, \pi)$$

Darboux小和 $\leq$ Riemann和 $\xrightarrow[\text{被包含+膨胀}]{\text{极限过程} \|\pi\| \rightarrow 0} \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$

Riemann可积和Darboux积分关系

$$f \in R[a, b] \iff \overline{\int}_a^b f(x) dx = \underline{\int}_a^b f(x) dx$$

Riemann和与Darboux和的关系

给定 f, π .

包含所有Riemann和 $\{S(f, \pi, \xi) : \forall \xi\}$ 的最小闭区间

$$= [s(f, \pi), S(f, \pi)]$$

Riemann和与Darboux和的关系定理的证明需要引理

Lemma

$$S(f, \pi) = \sup_{\xi} S(f, \pi, \xi)$$

$$s(f, \pi) = \inf_{\xi} s(f, \pi, \xi)$$

证明利用战略-战术方法

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

Darboux和与Darboux积分的关系

给定 f, π .

$$[s(f, \pi), S(f, \pi)] \supset \left[\int_a^b f(x) dx, \overline{\int}_a^b f(x) dx \right]$$

$$[s(f, \pi), S(f, \pi)] \xrightarrow{\|\pi\| \rightarrow 0} \left[\int_a^b f(x) dx, \overline{\int}_a^b f(x) dx \right]$$

Darboux定理

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} S(f, \pi) = \int_a^b f(x) dx$$

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} s(f, \pi) = \int_a^b f(x) dx$$

Riemann与Darboux关系定理

给定 f, π .

包含所有Riemann和 $\{S(f, \pi, \xi) : \forall \xi\}$ 的最小闭区间

$$= [s(f, \pi), S(f, \pi)]$$

$$\xrightarrow[\sup]{\|\pi\| \rightarrow 0} \left[\int_a^b f(x) dx, \overline{\int_a^b f(x) dx} \right]$$

Riemann可积性定理的等价描述

$$f \in R[a, b]$$

f 在 $[a, b]$ 有界
 $\longleftrightarrow$
 R - D 关系定理中

三个闭区间(之一)当 $\|\pi\| \rightarrow 0$ 时极限为独点集

- Darboux定理的证明需要用到大小和定理.

添加分点后, 大和不增, 小和不减.

大小和定理加强版本

$$\begin{array}{ccc}
 \pi & \xrightarrow{\text{添}k\text{个分点}} & \pi' \\
 \implies & & \\
 s(f, \pi) & \leq & S(f, \pi') \\
 \cap & & \cap \\
 [s(f, \pi), s(f, \pi) + k\omega\|\pi\|] & & [S(f, \pi) - k\omega\|\pi\|, S(f, \pi)]
 \end{array}$$

证明: Daboux大和情形

不妨设 $k = 1$:

$$\pi \xrightarrow{\text{添加分点 } x^* \in (x_{i-1}, x_i)} \pi'$$

$$S(f, \pi) - S(f, \pi')$$

$$= \left(M_i - \sup_{x \in [x_{i-1}, x^*]} f(x) \right) (x^* - x_{i-1}) + \left(M_i - \sup_{x \in [x^*, x_i]} f(x) \right) (x_i - x^*)$$

$$\in [0, \omega \|\pi\|]$$

证明: Daboux小和情形

Daboux小和情形的证明类似, 或将 f 换为 $-f$.

Darboux定理的证明

只证

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} S(f, \pi) = \int_a^b f(x) dx.$$

$$\int_a^b f(x) dx := \inf_{\pi} S(f, \pi) \in [m(b-a), M(b-a)]$$

$$\implies \int_a^b f(x) dx \in \mathbb{R}$$

$$\implies \forall \epsilon > 0, \exists \pi_0 : S(f, \pi_0) < \int_a^b f(x) dx + \frac{\epsilon}{2}$$

Darboux定理的证明续

$$\forall \pi: \|\pi\| < \frac{\epsilon}{2k_0(\omega+1)}, \quad k_0 = \pi_0 \text{ 分割点个数}$$

$$\int_a^b f(x) dx \leq S(f, \pi)$$

$$\leq S(f, \pi + \pi_0) + k_0 \omega \|\pi\| \quad (\text{大小和定理})$$

$$\leq S(f, \pi_0) + k_0 \omega \|\pi\| \quad (\text{大小和定理})$$

$$\leq \left(\int_a^b f(x) dx + \frac{\epsilon}{2} \right) + \frac{\epsilon}{2}$$

$$\implies \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} S(f, \pi) = \int_a^b f(x) dx.$$

$f \in R[-1, 1]$, f 在 $x = 0$ 处连续

$\varphi \in R[-1, 1]$, $\varphi \geq 0$, $\varphi_h(x) = \frac{1}{h}\varphi(\frac{x}{h})$

$$\implies \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-h}^h f(x) \varphi_h(x) dx = f(0) \int_{-1}^1 \varphi(x) dx$$

特例 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x) dx \underset{f \in R[-1, 1]}{\overset{f \text{ 在 } x=0 \text{ 连续}}{=}} f(0)$

方法: 常值 $\implies$ 差不多常值

f 在 $x = 0$ 处连续 $\implies \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (-\delta, \delta), |f(x) - f(0)| < \epsilon.$

当 $h \in (0, \delta)$ 时

$$(f(0) - \epsilon) \int_{-1}^1 \varphi(x) dx \leq \int_{-h}^h f(x) \varphi_h(x) dx \leq (f(0) + \epsilon) \int_{-1}^1 \varphi(x) dx$$

$$a_n, b_n \geq 0,$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛

$\implies \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛

$$\left\{ \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right\} \text{单调减少非负} \implies \left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} \text{收敛}$$
$$\xRightarrow{\{b_n\} \text{收敛}} \{a_n\} \text{收敛}$$

第37次作业:

[6.5] 1 2 3.

数学分析(A1), 第38次课

任广斌(中国科大)

2023-12-13

本次课主要内容

- Riemann可积性定理

Def

$A \subset \mathbb{R}$ 零测集

$$\iff 0 = m^*(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, I_n \text{ 是开区间} \right\}$$

$$\iff \forall \epsilon > 0, \exists \text{ 开区间 } I_n \subset \mathbb{R} : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \epsilon.$$

注记: 外测度=包含+收缩, 内测度=外测度+对合

- m^* 定义中要求可列覆盖

任意开覆盖 $\implies$ 存在可列子覆盖

- m^* 定义中的极限过程

粗糙 $\xRightarrow{\text{lim}}$ 精致

可列个零测集的并是可测集

- $\frac{\epsilon}{2^n}$ 技巧:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon.$$

$$\{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(r_n - \frac{\epsilon}{2^{n+1}}, r_n + \frac{\epsilon}{2^{n+1}} \right)$$

Def

f 在 $[a, b]$ a.e.连续 $\iff$ f 在 $[a, b]$ 不连续点集是零测集

Riemann可积性定理

$$f \in R[a, b] \iff f \text{ 在 } [a, b] \text{ 有界, a.e. 连续}$$

在一点处振幅

Def

$$f \text{ 在 } (x_0 - r, x_0 + r) \text{ 振幅} = \omega_f(x_0, r)$$

$$:= \sup_{x \in (x_0 - r, x_0 + r)} f(x) - \inf_{x \in (x_0 - r, x_0 + r)} f(x)$$

$$= \sup_{x, t \in (x_0 - r, x_0 + r)} |f(x) - f(t)|$$

$$f \text{ 在 } x_0 \text{ 处振幅} = \omega_f(x_0) := \lim_{r \rightarrow 0^+} \omega_f(x_0, r)$$

利用振幅刻画可积性和连续性

$$f \in R[a, b] \iff f \text{ 在 } [a, b] \text{ 有界, } \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = 0$$

$$f \text{ 在 } x_0 \text{ 连续} \iff \omega_f(x_0) = 0.$$

利用振幅刻画不连续点集

$D := f$ 的不连续点集

$$= \left\{ x \in [a, b] : \omega_f(x) \neq 0 \right\}$$

$$= \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{ x \in [a, b] : \omega_f(x) \geq \frac{1}{m} \right\}$$

$$=: \bigcup_{m=1}^{\infty} D_{\frac{1}{m}}$$

振幅是可积和连续的桥梁

$$x \in (x_{i-1}, x_i) \xrightarrow[\substack{(x-r, x+r) \subset (x_{i-1}, x_i)}]{0 < r \ll 1} \omega_i \geq \omega_f(x, r).$$

Riemann可积性定理的证明: 必要性

- f 在 $[a, b]$ a.e.连续

- $\forall m \in \mathbb{N}$,

$$D_{\frac{1}{m}} = \left\{ x \in [a, b] : \omega_f(x) \geq \frac{1}{m} \right\} \text{ 是零测集.}$$

- $\forall$ 分割 π ,

$$D_{\frac{1}{m}} \cap (x_{i-1}, x_i) \text{ 是零测集}$$

- $x \in D_{\frac{1}{m}} \cap (x_{i-1}, x_i) \xrightarrow{0 < r \ll 1} \omega_i \geq \omega_f(x, r) \geq \omega_f(x) \geq \frac{1}{m}$

续

$f \in R[a, b]$ $\xrightarrow[\text{可积充要条件}]{\text{任意固定 } m}$ $\forall \epsilon > 0, \quad \exists [a, b] \text{ 分割 } \pi :$

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon}{m} &> \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i \\ &\geq \sum_{i: D_{\frac{1}{m}} \cap (x_{i-1}, x_i) \neq \emptyset} \omega_i \Delta x_i \\ &\geq \frac{1}{m} \sum_{i: D_{\frac{1}{m}} \cap (x_{i-1}, x_i) \neq \emptyset} \Delta x_i \end{aligned}$$

$$D_{\frac{1}{m}} \subset \bigcup_{i: D_{\frac{1}{m}} \cap (x_{i-1}, x_i) \neq \emptyset} (x_{i-1}, x_i) \cup \bigcup_{i=0}^n \{x_i\}$$

$$\xRightarrow{\hspace{1cm}} m^*(D_{\frac{1}{m}}) \leq \sum_{i: D_{\frac{1}{m}} \cap (x_{i-1}, x_i) \neq \emptyset} \Delta x_i + \epsilon < 2\epsilon$$

Riemann可积性定理的证明: 充分性

- 设 f 的不连续点集 D 是零测集.

$$\forall \epsilon > 0, \exists (\alpha_i, \beta_i) :$$

$$D \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (\alpha_i, \beta_i), \quad \sum_{i=1}^{\infty} (\beta_i - \alpha_i) < \epsilon.$$

- 紧集 $K_{\epsilon} := [a, b] \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} (\alpha_i, \beta_i) \subset f$ 的连续点全体.

$[a, b]$ 上a.e.连续函数的弱一致连续性

Theorem

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a.e.连续

$\implies \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 :$

当 $x \in K_\epsilon, y \in [a, b], |x - y| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

证明

反证: $\exists \epsilon_0 > 0, \exists s_n, t_n: s_n \in K_{\epsilon}, t_n \in [a, b], |s_n - t_n| < \frac{1}{n},$

$$|f(s_n) - f(t_n)| \geq \epsilon_0.$$

取子列 $s_{k_n} \rightarrow s^* \in K_{\epsilon}$

$$\implies t_{k_n} \rightarrow s^*$$

$$\implies 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} |f(s_{k_n}) - f(t_{k_n})| \geq \epsilon_0. \quad \text{矛盾}$$

(注记: $\lim_{x \rightarrow s^*} f(x) = f(s^*) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(t_{k_n}) = f(s^*)$)

Riemann可积函数的两个有界性

函数有界 $\implies \omega_i \in [0, \omega]$

区间有界 $\implies \Delta x_i \in [0, b - a]$

利用 K_ϵ 分割Riemann和

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i \equiv \sum_{K_\epsilon \cap (x_{i-1}, x_i) \neq \emptyset} \omega_i \Delta x_i + \sum_{K_\epsilon \cap (x_{i-1}, x_i) = \emptyset} \omega_i \Delta x_i$$

在连续点处Riemann和的估计

- 在连续点处振幅小: 假设 $K_\epsilon \cap (x_{i-1}, x_i) \neq \emptyset$

$$\begin{aligned}\omega_i &= \sup_{z_1, z_2 \in [x_{i-1}, x_i]} |f(z_1) - f(z_2)| \\ &\leq \sup_{z_1, z_2 \in [x_{i-1}, x_i]} |f(z_1) - f(y_i)| + |f(y_i) - f(z_2)| \\ &< 2\epsilon \quad (\text{取 } y_i \in K_\epsilon \cap (x_{i-1}, x_i))\end{aligned}$$

$$\implies \sum_{K_\epsilon \cap (x_{i-1}, x_i) \neq \emptyset} \omega_i \Delta x_i < 2(b-a)\epsilon$$

在不连续点处Riemann和的估计

- 在不连续点处, 集合小:

$$K_\epsilon \cap (x_{i-1}, x_i) = \emptyset, \quad K_\epsilon \subset [a, b] \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} (\alpha_j, \beta_j)$$

$$\implies (x_{i-1}, x_i) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (\alpha_j, \beta_j)$$

$$\implies \left| \sum_{K_\epsilon \cap (x_{i-1}, x_i) = \emptyset} \omega_i \Delta x_i \right| \leq \omega \sum_{i=1}^{\infty} (\beta_i - \alpha_i) < \omega \epsilon.$$

f 在 $[a, b]$ 有界, a.e.连续

$$\Longrightarrow \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = 0$$

可积充要条件

$$\Longrightarrow f \in R[a, b]$$

Riemann可积性定理的推论

$$C[a, b] \subset R[a, b],$$

$$[a, b] \text{上单调函数全体} \subset R[a, b]$$

- Riemann积分是非绝对可积的积分理论

$$f \in R[a, b] \xRightarrow{\text{反之不成立}} |f| \in R[a, b]$$

- Lebsgue积分是绝对可积的积分理论

$$R[a, b] \text{的完备化} = L^1[a, b]$$

- $R[a, b]$ 对于加法、数乘、乘法封闭
- $R[a, b]$ 对于除法不封闭

$$f \in R[a, b] \xrightarrow{f \neq 0, \frac{1}{f} \text{有界}} \frac{1}{f} \in R[a, b]$$

- $R[a, b]$ 对于复合不封闭

$$f \in C[a, b], \quad g \in R[\alpha, \beta] \xrightarrow{g[\alpha, \beta] \subset [a, b]} f \circ g \in R[\alpha, \beta]$$

- Riemann可积函数的限制保持可积性

$$f \in R[a, b] \xRightarrow{[c, d] \subset [a, b]} f|_{[c, d]} \in R[c, d]$$

- Riemann可积函数可以焊接:

$$f \in R[a, b] \cup R[b, c] \implies f \in R[a, c]$$

Riemann函数 $R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是周期为1的函数.

$$R(x) \stackrel{\forall x \in (0, 1]}{=} \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, \quad (p, q) = 1, \quad p, q \in \mathbb{N}; \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Riemann函数的性质

- Riemann函数在无理点连续, 有理点第一类可去间断.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = 0$$

证明: 不妨设 $x_0 \in (0, 1]$. 则 $(x_0 - 1, x_0 + 1)$ 中除去有限个有理数, 其分母足够大:

$$\frac{1}{q} < \epsilon \iff q > \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1$$

除去 $q = 1, 2, \dots, \left[\frac{1}{\epsilon}\right]$.

Riemann函数的性质

- Riemann函数无原函数(Darboux), 变上限积分不提供原函数.

$$R(x) \in R[a, b] \setminus C[a, b]$$

$$0 \equiv \left(\int_0^x R(x) dx \right)' \underset{\text{a.e.}}{\stackrel{\text{当且仅当 } x \text{ 是 } R(x) \text{ 连续点}}{=}} R(x)$$

- $\chi_{(0,1]} \in R[0, 1], \quad R \in R[0, 1].$

$$\chi_{(0,1]} \circ R = \chi_{[0,1] \cap \mathbb{Q}} \notin R[0, 1].$$

零测集对于Riemann可积性的影响

- 修改函数在零测集的值, 可能改变Riemann可积性(不改变Lebesgue可积性)

例如 $0 \longrightarrow \chi_{[0,1] \cap \mathbb{Q}}, \quad R(x)$

- 修改函数在有限个点处的值, 不改变Riemann可积性和积分值.

$$f \in R[-1, 1], \quad f \text{ 在 } x = 0 \text{ 处连续}$$

$$\varphi \in R[-1, 1], \quad \varphi \geq 0, \quad \varphi_h(x) = \frac{1}{h} \varphi\left(\frac{x}{h}\right)$$

$$\implies \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-h}^h f(x) \varphi_h(x) dx = f(0) \int_{-1}^1 \varphi(x) dx$$

特例

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x) dx \underset{f \in R[-1, 1]}{\overset{f \text{ 在 } x = 0 \text{ 连续}}{=}} f(0)$$

方法: 常值 $\implies$ 差不多常值

f 在 $x = 0$ 处连续 $\implies \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (-\delta, \delta), |f(x) - f(0)| < \epsilon.$

当 $h \in (0, \delta)$ 时

$$(f(0) - \epsilon) \int_{-1}^1 \varphi(x) dx \leq \int_{-h}^h f(x) \varphi_h(x) dx \leq (f(0) + \epsilon) \int_{-1}^1 \varphi(x) dx$$

第38次作业:

[6.6] 1 2 3 4.

数学分析(A1), 第39次课

任广斌(中国科大)

2023-12-15

本次课主要内容

- 常数变易法, 扰动法
- 变分法
- 冷冻法: Gronwall不等式

- 常数变易法是拟合方法：降维打击
 - 将常值放到函数的框架下, 利用函数的导数和积分工具处理常值问题.
 - 将数列放到函数的框架下, 利用函数的导数和积分工具处理常值问题.
- 涉及矛盾:

离散: 连续 $\longleftrightarrow$ 求导: 积分

例1

π^3 , 3^π 谁大

$$\frac{3^\pi}{\pi^3} \xrightarrow{\text{常数变易法}} \frac{3^x}{x^3} \Big|_{x=\pi} = f(x) \Big|_{x=\pi}$$

$$f' > 0 \quad \forall x > \frac{3}{\log 3} \implies f(\pi) > f(3) = 1.$$

数列单调性的量子化方法

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \nearrow, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \searrow$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+p} \searrow \xLeftrightarrow{\text{平分天下}} p \geq \frac{1}{2}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+p} \searrow \xrightarrow[\text{离散变量换为连续变量}]{\text{量子化}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+p} =: e^{f(x)}$$

$$f(x) = (x + p) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + (x + p)\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{x}\right)$$

$$f'(+\infty) = 0. \quad (\text{敢于和善于使用在无穷远点的值})$$

$$\begin{aligned}f''(x) &= \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x} + (x+p)\left(-\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{x^2}\right) \\&= \frac{-2}{(1+x)x} + \frac{(x+p)(2x+1)}{(1+x)^2x^2} \\&= \frac{(2p-1)x+p}{(1+x)^2x^2}.\end{aligned}$$

$$f''(x) = \begin{cases} > 0 & p \geq \frac{1}{2} \implies f' \nearrow < 0 \implies f \searrow \\ < 0 & p < \frac{1}{2}, x \gg 1 \xrightarrow{x \gg 1} f' \searrow > 0 \xrightarrow{x \gg 1} f \nearrow \end{cases}$$

级数转化为幂级数的量子化方法

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{2k+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{2k+1} \quad \xrightarrow{\text{量子化}} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1} \Big|_{x=1} = f(x) \Big|_{x=1}$$

$$f'(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^{2k} = (1-x^2)^n$$

$$f(1) \quad \underline{\underline{=}} \quad f(0) + \int_0^1 f'(x) dx = \int_0^1 (1 - x^2)^n dx$$

$$\underline{\underline{x = \sin t}} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t dt$$

$$\underline{\underline{\text{递推公式}}} \quad \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

两种方法计算同一个式子

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \begin{cases} \text{Newton二项式展开} & \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{2k+1} \\ \text{积分变量代换} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t dt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \end{cases}$$

量子化为桥梁链接条件和结论

$$\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \cdots + a_n = 0$$

$$\implies a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \text{ 在 } (0, 1) \text{ 有解}$$

见到方程就积分, 积分化为变分方程

- 方程写为变分方程

$$\left(\frac{a_0}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_1}{n} x^n + \cdots + a_n x \right)' = 0$$

- 变分方程的求解转化为边值问题.

- 条件 $\xrightarrow{\text{量子化}}$ 函数的边界值 $f(0) = f(1) = 0$.

- 函数的两个零点 $\xrightarrow[f'(\xi)=0]{f(0)=f(1)=0}$ 提供导函数的一个零点.

量子化提供一个参数

$$f \in C[a, b] \nearrow \implies \int_a^b xf(x)dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx$$

- 将常量 b 视为参数 t , 问题转化为证明一个函数非负.

$$g(t) = \int_a^t xf(x)dx - \frac{a+t}{2} \int_a^t f(x)dx \geq 0$$

- 利用微积分的工具处理非负性:

$$\begin{aligned} g'(t) &= tf(t) - \frac{1}{2} \int_a^t f(x)dx - \frac{a+t}{2}f(t) \\ &= \frac{1}{2} \int_a^t (f(t) - f(x))dx \geq 0 \quad (f \nearrow) \end{aligned}$$

$$\xrightarrow[g(a)=0]{g \nearrow} g(t) \geq 0.$$

单调性的一个不等式刻画

- 单调性的刻画

$$\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\left(f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \geq 0$$

- 结论转化为

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\left(f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) dx \geq 0.$$

Gronwall不等式: 有选择的量子化

$$f \in C[0, T], \varphi \in C[0, T], \varphi \geq 0, M(t) \nearrow \geq 0,$$

$$f(t) \leq M(t) + \int_0^t f(s)\varphi(s)ds, \quad \forall t \in [0, T]$$

$$\implies f(t) \leq M(t)e^{\int_0^t \varphi(s)ds}.$$

不等式 $\xrightarrow[\text{冷冻积分之外项}]{\text{部分量子化}}$ 单调性

- 只要证明

$$M(t_0) + \int_0^{t_0} f(s)\varphi(s)ds \leq M(t_0)e^{\int_0^{t_0} \varphi(s)ds}, \quad \forall t_0 \in [0, T].$$

- 只要证明:

$$M(t_0) + \int_0^t f(s)\varphi(s)ds \leq M(t_0)e^{\int_0^t \varphi(s)ds}, \quad \forall t \in [0, t_0], \quad \forall t_0 \in [0, T].$$

- 不妨设 $t_0 > 0$ (否则 $t_0 = 0 \implies t = 0$).

- 将积分之外的项冷冻: (固定 $t_0 \in (0, T]$)

$$M(t_0) + \int_0^t f(s)\varphi(s)ds \leq M(t_0)e^{\int_0^t \varphi(s)ds}, \quad \forall 0 \leq t \leq t_0.$$

- 归结于证明积分的单调性:

$$\left(M(t_0) + \int_0^t f(s)\varphi(s)ds\right)e^{-\int_0^t \varphi(s)ds} \searrow \quad \forall 0 \leq t \leq t_0$$

- 利用导数验证单调性:

将方程转化为变分方程的方法

$$f, g \text{ 在 } [a, b] \text{ 可导, 而且 } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx = 0$$

$$\implies \exists \zeta \in (a, b), \quad f'(\zeta) \int_a^\zeta g(x) dx = g'(\zeta) \int_a^\zeta f(x) dx$$

- 归结于变分方程

$$F'(x) = 0.$$

$$\text{其中} \quad F(x) = f(x) \int_a^x g(t) dt - g(x) \int_a^x f(t) dt.$$

变分方程的构造来自分部积分

$$F'(x) = f'(x) \int_a^x g(t) dt - g'(x) \int_a^x f(t) dt$$

两边积分

$$\Rightarrow F(x) - F(a) = \int_a^x \left(f'(s) \int_a^s g(t) dt - g'(s) \int_a^s f(t) dt \right) ds$$

$$= \int_a^x \left(\int_a^s g(t) dt \right) df(s) - \int_a^x \left(\int_a^s f(t) dt \right) dg(s)$$

$$\underline{\underline{\text{分部积分}}} \quad f(x) \int_a^x g(t) dt - g(x) \int_a^x f(t) dt.$$

变分方程的求解归结于无穷区间的Rolle定理

设 f 在 $[0, +\infty)$ 上可导, 且 $0 \leq f(x) \leq \frac{x}{1+x^2}$

$$\implies \exists \xi > 0, f'(\xi) = \frac{1 - \xi^2}{(1 + \xi^2)^2}$$

变分方程的构造和求解

- 变分方程的构造

$$F'(x) = f'(x) - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

两边积分
 $\Rightarrow$

$$F(x) = f(x) + \int_0^x \frac{1-s^2}{(1+s^2)^2} ds + C$$

$$= f(x) - \frac{x}{1+x^2} + C \quad (\text{取 } C = 0)$$

- 利用 $[0, \infty]$ 上的Rolle定理.

变分方程失效: 利用Rolle定理

$$f \in C[0, 1], \quad f(x) \geq 0, \quad f(1) = 0$$

$$\implies \exists \xi \in (0, 1), \quad f(\xi) = \int_0^\xi f(x) dx$$

变分方程失效: 利用Rolle定理

- 变分方程

$$\left(e^{-x} \int_0^x f(s) ds \right)' = 0$$

- 量子化

$$G(x) := f(x) - \int_0^x f(s)ds$$

- 端点异号

$$G(1)G(x_0) \leq 0 \quad (x_0 \text{ 是 } f \text{ 最大值点})$$

$$(i). G(1)G(x_0) < 0 \xrightarrow{\text{介值定理}} \exists \zeta \in (x_0, 1) \subset (0, 1) : G(\zeta) = 0$$

$$(ii). G(1) = 0 \xrightarrow[f \geq 0]{f(1)=0} G(x) \equiv 0$$

$$(iii). G(x_0) = 0 \implies G|_{[0, x_0]} \equiv 0$$

$$(iv). x_0 = 0 \implies f \equiv 0 \implies G \equiv 0.$$

$$f \in R[0, 1] \searrow \implies \int_0^a f(x) dx \geq a \int_0^1 f(x) dx \quad \forall a \in (0, 1).$$

当 $f \in C[a, b]$ 时, 对于下列函数使用量子化方法:

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right) &= \frac{1}{x} \left(f(x) - \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{x} (f(x) - f(\xi)) \\ &\leq 0 \quad (f \searrow) \end{aligned}$$

当 $f \in R[a, b]$ 时, 量子化方法失效.

$$\int_0^a f(x) dx \stackrel{x=at}{=} a \int_0^1 f(ax) dx \geq a \int_0^1 f(x) dx$$

$$(f \searrow \implies f(at) \geq f(t))$$

$f \in R[-1, 1]$, f 在 $x = 0$ 处连续

$\varphi \in R[-1, 1]$, $\varphi \geq 0$, $\varphi_h(x) = \frac{1}{h}\varphi(\frac{x}{h})$

$$\implies \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-h}^h f(x) \varphi_h(x) dx = f(0) \int_{-1}^1 \varphi(x) dx$$

特例 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x) dx \underset{\substack{f \text{ 在 } x=0 \text{ 连续} \\ f \in R[-1, 1]}}{=} f(0)$

方法: 常值 $\implies$ 差不多常值

f 在 $x = 0$ 处连续 $\implies \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (-\delta, \delta), |f(x) - f(0)| < \epsilon.$

当 $h \in (0, \delta)$ 时

$$(f(0) - \epsilon) \int_{-1}^1 \varphi(x) dx \leq \int_{-h}^h f(x) \varphi_h(x) dx \leq (f(0) + \epsilon) \int_{-1}^1 \varphi(x) dx$$

数学分析(A1), 第40次课

任广斌(中国科大)

2023-12-18

本次课主要内容

- 广义积分(反常积分、 奇异积分)

Riemann积分的两个有界性条件

- 区间 $[a, b]$ 有界 (定义域有界)
- 函数 f 有界 (值域有界)

广义Riemann积分

广义Riemann积分	{	无穷限广义Riemann积分	破除区间的有界性
		瑕积分	破除函数的有界性

$$\text{广义Riemann积分} = \text{Riemann积分} + \lim$$

以Riemann积分为基础的推广

- Riemann积分(非绝对收敛积分理论):

$$f \in R[a, b] \implies |f| \in R[a, b]$$

- 广义Riemann积分(非绝对收敛积分理论):

$$|f| \in R[a, +\infty) \xrightarrow[\substack{\text{Cauchy判别准则} \\ f \in R[a, b] \ \forall b > a}]{\text{Cauchy判别准则}} f \in R[a, +\infty)$$

- Lebesgue积分(绝对收敛积分理论):

$$f \in L^1[a, b] \iff |f| \in L^1[a, b]$$

广义Riemann积分的几何意义

- 单位圆周长度:

$$2 \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \text{瑕积分.}$$

- 面积:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \quad \text{无穷积分.}$$

无穷积分

假设 f 在 $[a, +\infty)$ 局部Riemann可积, 右端极限存在有限. 定义

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \stackrel{\text{定义}}{=} \lim_{b \rightarrow +\infty} \underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{\substack{f \in R[a,b] \\ \text{极限存在有限}}},$$

称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 称 f 在 $[a, +\infty)$ 广义Riemann可积.

否则称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

无穷积分收敛Cauchy判别准则

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛} \iff \forall \epsilon > 0, \exists M > a, \text{ 当 } B > A > M \text{ 时}$$

$$\left| \int_A^B f(x)dx \right| < \epsilon$$

证明: $G(b) := \int_a^b f(x)dx$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} G(b) \text{ 存在有限} \iff \forall \epsilon > 0, \exists M > a, \text{ 当 } B > A > M \text{ 时}$$

$$|G(A) - G(B)| < \epsilon$$

即 $\left| \int_A^B f(x)dx \right| < \epsilon$

- Riemann积分: 无穷积分 $\Longleftrightarrow$ 有限和: 无穷级数
- 无穷积分=Riemann积分+lim=双重极限=收缩+膨胀
- 无穷积分 $\neq$ 和式极限

- 敛散性与初始值无关, 同级数情形.
- 有两个瑕点归结于只有一个瑕点情形:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx : \frac{\text{右端两个积分收敛}}{\text{称 } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛}} \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

瑕积分

假设 a 是 f 的瑕点, f 在 $(a, b]$ 局部Riemann可积, 右端极限存在有限.
定义

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \underbrace{\int_{a+\epsilon}^b f(x)dx}_{\substack{f \in R[a+\epsilon, b] \\ \text{极限存在有限}}},$$

称 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛, 称 f 在 $[a, b]$ 广义Riemann可积.

否则称 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

瑕积分收敛Cauchy判别准则

$$\int_a^b f(x)dx \text{ 收敛}(a \text{ 为瑕点})$$

$\iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $a < c < d < a + \delta$ 时

$$\left| \int_c^d f(x)dx \right| < \epsilon$$

- 有两个瑕点归结于只有一个瑕点情形:

$$\int_a^b f(x) dx : \frac{\text{右端两个积分收敛}}{a, b \text{ 是瑕点}, c \in (a, b)} \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

无穷积分和瑕积分联系

- 无穷积分和瑕积分本质相同 (x轴, y轴地位等价)

- 无穷积分: 面积沿着x轴跑到 ∞ .
- 瑕积分: 面积沿着y轴跑到 ∞ .

- 无穷积分和瑕积分镜面对称:

假设 f 严格单调减少连续, $f(1) = 1, f(+\infty) = 0$

$$\underbrace{\int_1^{+\infty} f(x) dx}_{\text{以} +\infty \text{为瑕点}} \xrightarrow{\text{两边面积镜面对称}} \underbrace{\int_0^1 f^{-1}(x) dx}_{\text{以} 0 \text{为瑕点}} - 1$$

- $y = f(x)$ 的图形沿着直线 $y = x$ 的镜面对称是 $y = f^{-1}(x)$.

曲边梯形的面积(左) $\xrightarrow{\text{镜面对称}}$ 曲边梯形的面积(右).

广义Riemann积分计算方法

- 原理:

广义Riemann积分 $\Longleftrightarrow$ Riemann积分+极限

Newton-Leibniz公式

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad \frac{f \in R[a, +\infty)}{f \text{ 存在原函数 } F} \quad F(x) \Big|_a^{+\infty}$$

$$F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \text{ 存在有限}$$

分部积分公式

$$\int_a^{+\infty} f(x) dg(x) \stackrel{\substack{f, g \in C^1[a, +\infty) \\ \text{右端有意义}}}{=} f(x)g(x)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} g(x) df(x)$$

$$(fg)(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (fg)(x) \text{ 存在有限}$$

变量代换公式

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \xrightarrow[\substack{x = \varphi(t), \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = +\infty \\ \varphi[\alpha, \beta] \subset [a, +\infty]}}{\substack{f \in C[a, +\infty), \varphi \in C^1[\alpha, \beta]}} \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

- 瑕点 $+\infty$ 换为有限瑕点 b , 结论仍然成立.

- Newton-Leibniz公式

- 分部积分公式

- 变量代换公式

$$b < \infty \quad \xRightarrow{\int_a^b} \quad b = \infty.$$

两个重要积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \text{收敛} \quad \xLeftrightarrow{p \rightarrow +\infty \text{情形}} \quad p > 1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx \text{收敛} \quad \xLeftrightarrow{p \rightarrow -\infty \text{情形}} \quad p < 1.$$

广义积分中两个重要变量代换

$$x = \frac{1}{t} \qquad x = \tan t.$$

例题

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$$

$$I \quad \underline{\underline{x = \frac{1}{t}}} \quad -I, \quad I \in \mathbb{R}$$

$$I \quad \underline{\underline{x = \tan t}} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \tan t dt = 0$$

例题

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} dx.$$

$$\text{特别} \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

$$I \quad \underline{\underline{x = \tan t}} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 t}{\sec^2 t (1 + \tan^\alpha t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \tan^\alpha t} dt$$

$$I \quad \underline{\underline{t = \frac{\pi}{2} - s}} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^\alpha s}{1 + \tan^\alpha s} ds$$

$$2I \quad \underline{\underline{\text{相加}}} \quad \frac{\pi}{2} \Longrightarrow I = \frac{\pi}{4}$$

$$I \quad \underline{\underline{=}} \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} dx$$

$$\underline{\underline{x = \frac{1}{t}}} \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{t^2})(1+\frac{1}{t^\alpha})} \frac{1}{t^2} dt$$

$$\underline{\underline{=}} \quad \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(1+t^2)(1+t^\alpha)} dt$$

$$2I \quad \underline{\underline{\text{相加}}} \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt \quad \underline{\underline{=}} \quad \arctan t \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$$

$$\underline{\underline{x = \frac{\pi}{2} - t}} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos t dt$$

$$2I \quad \underline{\underline{\text{相加}}} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2} \sin(2x)\right) dx$$

$$= -\frac{\pi}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln \sin x dx = -\frac{\pi}{2} + I$$

$$I = -\frac{\pi}{2} \ln 2$$

广义Riemann积分是条件收敛积分

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx \text{ 收敛, } \int_0^{+\infty} |\sin(x^2)| dx \text{ 发散}$$

$$I \quad \underline{\underline{t = x^2}} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt$$

$$\left| \int_A^B \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt \right| \quad \frac{\text{积分第二中值定理}}{\text{Dirichlet判别法}} \quad \frac{1}{2\sqrt{A}} \left| \int_A^\zeta \sin t dt \right|$$

$$\leq \quad \frac{1}{\sqrt{A}} \rightarrow 0 \quad B > A \rightarrow +\infty$$

$$\xRightarrow{\text{Cauchy准则}} \quad \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx \text{收敛}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} |\sin(x^2)| dx & \stackrel{t=x^2}{=} \int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{2\sqrt{t}} dt \\
 & \geq \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{2\sqrt{t}} dt \\
 & \stackrel{=}{=} \int_0^{+\infty} \frac{1}{4\sqrt{t}} dt - \int_0^{+\infty} \frac{\cos 2t}{4\sqrt{t}} dt = +\infty
 \end{aligned}$$

Dirichlet判别法

- $f \in C[a, +\infty)$, $\int_a^t f(x)dx$ 在 $[a, +\infty)$ 有界
- g 在 $[a, +\infty)$ 单调减少, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

积分第二中值定理 $\implies \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

例如: $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

积分第二中值定理

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{权函数}} g(x) dx \stackrel{\substack{f, g \in R[a, b] \\ \text{\textcolor{red}{f}单调减非负} \\ \exists \zeta \in [a, b]}}{=} \underbrace{f(a)}_{\text{最大值}} \underbrace{\int_a^{\zeta} g(x) dx}_{\text{中值在积分限}}$$

积分中值定理是分离工具.

积分中值定理

Theorem (积分第一中值定理)

$$\int_a^b f(x) \underbrace{g(x) dx}_{\text{正测度}} \underset{\substack{f \in C[a,b], g \in R^+[a,b] \\ \exists \zeta \in [a,b]}}{=} f(\zeta) \int_a^b g(x) dx$$

注1: 在 $f, g \in C[a, b]$, $g > 0$ 的假设下, 可取中值为内点 $\zeta \in (a, b)$.

注2: $R^+[a, b] = \{f \in R[a, b] : f \geq 0\}$.

Abel判别法

- $f \in C[a, +\infty)$, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛
- g 在 $[a, +\infty)$ 单调有界

$$\xrightarrow[\text{不妨设 } g(+\infty) = 0]{\text{Dirichlet判别法}} \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \text{ 收敛.}$$

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ 收敛 } \begin{cases} \text{在 } \infty \text{ 点退化} \\ \text{在 } \infty \text{ 点振荡} \end{cases}$$

$$f \in C[a, +\infty), f \geq 0, \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ 收敛} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

第40次作业:

[6.7] 1 (1)(8)(10)(12), 3 (2)(4)(6)(7), 6

数学分析(A1), 第41次课

任广斌(中国科大)

2023-12-20

本次课主要内容

- 数值积分
- Jensen公式
- Stirling公式

离散与连续的矛盾

- 离散和连续是一对矛盾

离散分析 { 计算机时代
量子物理

离散版本分析 $\xrightarrow{\text{极限}}$ 连续版本分析

- 困难

初等函数的不定积分可能不是初等函数

- 积分算法： 数值计算
- 积分算法： 视初等函数为无穷次多项式

n 等分方法： $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

$$x_i = a + i \frac{b - a}{n}$$

在小的长方形面积的计算中涉及高的选取

高	{	中点的高	涉及定义域的平均	
		端点高的平均	涉及值域的平均,	梯形法

$f \in C^2[a, b]$, 则存在 $\xi, \eta \in (a, b)$ 使得

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx & \stackrel{x_i = a + i \frac{b-a}{n}}{=} \sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \Delta x_i - \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi) \\ & \stackrel{=}{=} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \Delta x_i + \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\eta) \end{aligned}$$

- 积分数值计算

$$\text{余项} \equiv O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

平均值中值定理

$f \in C^2[a, b]$, 则存在 $\xi, \eta \in (a, b)$ 使得

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx &= \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{(b-a)^2}{12} f''(\xi) \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{24} f''(\eta) \end{aligned}$$

- 关于区间中点的分部积分公式+在端点退化的分部积分+积分中值定理

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) d\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$$

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{2(b-a)} \int_a^b f'(x) d((x-a)(x-b))$$

$$\frac{x=(1-t)a+tb}{2} \quad \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{(b-a)^3}{2(b-a)} \int_0^1 t(1-t) dt f''(\xi)$$

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{(b-a)^2}{12} f''(\xi)$$

- Newton-Leibniz公式+原函数于端点处在中点Taylor展开消去偶次项.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

$$\underline{\underline{F \in C^3[a,b]}} \quad F'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{F''(\xi) + F''(\zeta)}{3!} \left(\frac{b-a}{2}\right)^3$$

$$\underline{\underline{Darboux}} \quad f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta)$$

梯形法的证明

- n 等分区间上每一个利用平均值中值定理, 再相加:

$$x_i = a + i \frac{b-a}{n}, \quad x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$$

$$\frac{1}{x_i - x_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} - \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{12} f''(\xi_i)$$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} - \frac{(b-a)^2}{12n^2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f''(\zeta_i)$$

$$\stackrel{\text{Darboux}}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} - \frac{(b-a)^2}{12n^2} f''(\zeta)$$

凸函数积分平均

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ 凸}$$

$$\implies f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

- 若 $f \in C^2[a, b]$, 则凸函数积分平均不等式是平均值中值定理的推论.
- 凸函数积分平均不等式无需条件 $f \in C^2[a, b]$.

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ 凸}$$

$$\implies f \text{ 在 } [a, b] \text{ 上有界, 在 } (a, b) \text{ 上连续}$$

$$\implies f \in R[a, b]$$

- 利用凸函数的定义(第一个不等式)和四点判别法(第二个不等式):

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a + \theta(b-a)) + f(b - \theta(b-a))}{2} \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

- 积分,利用下列公式

$$\int_0^1 f(a + \theta(b-a)) d\theta \stackrel{x = a + \theta(b-a)}{=} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$
$$\int_0^1 f(b - \theta(b-a)) d\theta \stackrel{x = b - \theta(b-a)}{=} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

- 切线围成的面积 $\leq$ 曲边梯形的面积 $\leq$ 割线围成的面积

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Jensen不等式(次线性的积分形式)

$$\varphi : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}^{\text{凸}}$$

$$f : [a, b] \longrightarrow [\alpha, \beta], \quad f, \omega \in C[a, b]$$

$d\mu(x) := \omega(x)dx$ 是 $[a, b]$ 上概率测度

$$\implies \varphi\left(\int_a^b f(x) d\mu(x)\right) \leq \int_a^b \varphi(f(x)) d\mu(x)$$

$$\varphi \text{凸} \xRightarrow{\text{存在支撑线}} \varphi(y) \geq \varphi(c) + \alpha(y - c)$$

$$\text{取 } y = f(x), \quad c = \int_a^b f(x) d\mu(x) \in [\alpha, \beta]$$

$$\xRightarrow{\text{两边积分}} \int_a^b \varphi(f(x)) d\mu(x) \geq \varphi(c).$$

- 凸函数的支撑线不等式—— 除去积分外衣的Jensen不等式.

Stirling公式

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}, \quad \theta_n \in (0, 1)$$

- 只要证

$$a_n = \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} \in (1, e^{\frac{1}{12n}})$$

- 只要证

$$a_n \searrow 1, \quad a_n e^{-\frac{1}{12n}} \nearrow 1$$

- $a_n \searrow 1$ 的证明:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n}}{\frac{(n+1)!}{\sqrt{2\pi(n+1)}(\frac{n+1}{e})^{n+1}}} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \searrow 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \text{ 只要证 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2}{a_{2n}} = 1$$

这来自于Wallis公式.

- $a_n e^{-\frac{1}{12n}}$ 的证明:

$$|x| < 1 \implies \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x} \ln \frac{1+x}{1-x} &= \frac{1}{x} (\ln(1+x))_{\text{odd}} \\ &= 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \dots \\ &< 1 + \frac{x^2}{3} (1 + x^2 + x^4 + \dots) \quad 0 < |x| < 1 \\ &= 1 + \frac{1}{3} \frac{x^2}{1-x^2} \end{aligned}$$

$$0 < |x| < 1 \implies \frac{1}{2x} \ln \frac{1+x}{1-x} < 1 + \frac{1}{3} \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$\xRightarrow{x=\frac{1}{2n+1}} \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \frac{n+1}{n} < 1 + \frac{1}{12n(n+1)}$$

$$\implies a_n e^{-\frac{1}{12n}} \text{ 严格单调增加}$$

$$\frac{a_n e^{-\frac{1}{12n}}}{a_{n+1} e^{-\frac{1}{12(n+1)}}} = e^{-(1+\frac{1}{12n(n+1)})} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < 1$$

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{n\pi}$$

积分公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} & n \text{ 奇} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2} & n \text{ 偶} \end{cases}$$

证明: 分部积分两次得到递推公式

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geq 2), \quad I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = 1.$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d \cos x$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} I_{n-4} = \cdots = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} I_1 & n \text{ 奇} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} I_0 & n \text{ 偶} \end{cases}$$

Wallis公式的证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x dx.$$

$$\implies \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

$$\implies \frac{1}{2n+1} \frac{2}{\pi} \leq \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 \leq \frac{1}{2n} \frac{2}{\pi}$$

$$\implies \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 \sim \frac{1}{n\pi}$$

Wallis公式作用在于证明Stirling公式

Stirling公式 $\implies$ Wallis公式

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} \sim 2^{2n} \frac{\left(\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \right)^2}{\sqrt{2\pi(2n)} \left(\frac{2n}{e} \right)^{2n}} = \sqrt{n\pi}$$

证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2}{a_{2n}} = 1$

$$\frac{a_n^2}{a_{2n}} = \frac{\left(\frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} \right)^2}{\frac{(2n)!}{\sqrt{2\pi 2n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim 1$$

第41次作业:

[7.4] 1, 2

数学分析(A1), 第42次课

任广斌(中国科大)

2023-12-22

本次课主要内容

- 积分的几何应用
 - 曲线弧长
 - 平面图形的面积

几何不变量

弧长	曲率
整体	局部
积分	微分

- C^1 曲线

$\sigma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2 \implies$ 走入多变量微积分

曲线 $\implies$ 弯曲空间 $\implies$ 1维流形 (外围空间2维)

光滑曲线的参数表示

- 映照观点

$$\sigma : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longmapsto (x(t), y(t))$$

$$x(t), y(t) \in C^1[\alpha, \beta]$$

- 参数表示

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$$

曲线的显示表示和参数表示

显示表示	参数表示
x, y 关系明确	x, y 地位相同
曲线与平行于 y 轴的直线最多交于一点	封闭曲线必须用参数表示
$y = f(x), \quad x \in [a, b]$	$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$

曲线弧长的定义

- 选定曲线参数增加的方向
- 对曲线进行分割, 通过分割曲线参数区间实现

$$\pi : \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$$

$$\|\pi\| := \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})$$

- 曲线的长度=割线长度的极限

$$L(\sigma) = \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}$$

弧长	弧长的计算
与曲线的方向无关	与曲线的方向有关
与曲线的参数方程无关	与曲线的参数方程有关
天生属性	后天计算手段

- 不可求长曲线:

分形雪花状曲线, Koch曲线

====> 分形几何

曲线长度的积分表达式

$$\text{曲线}\sigma\text{的长度} = L(\sigma) \stackrel{\sigma \in C^1([\alpha, \beta], \mathbb{R}^2)}{=} \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

$$L(\sigma) \quad \equiv \quad \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}$$

$$\underline{\text{中值定理}} \quad \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\eta_i))^2} \Delta t_i$$

$$\quad \equiv \quad \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt + I$$

$$I = \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\eta_i))^2} - \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\xi_i))^2} \right) \Delta t_i$$

$$|I| \leq \overline{\lim}_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left| \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\eta_i))^2} - \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\xi_i))^2} \right| \Delta t_i$$

$$\leq \overline{\lim}_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |y'(\eta_i) - y'(\xi_i)| \Delta t_i$$

$$\leq \overline{\lim}_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i(y') \Delta t_i = 0.$$

由几何意义可看出

$$|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2}| \leq |b - c|$$

- 若 $x', y' \in R[\alpha, \beta]$, 则曲线长度的积分公式仍然成立.

- 曲线的长度是切向量长度的积分

切向量 $\sigma'(t) = (x'(t), y'(t))$

切向量长度 $\|\sigma'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$

曲线长度 $L(\sigma) = \int_{\alpha}^{\beta} \|\sigma'(t)\| dt$

弧长微分公式

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \frac{\text{沿着参数增加方向}}{\text{弧长增加}} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

$$\text{曲线长度函数} = s(t) := \int_{\alpha}^t \sqrt{(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2} d\tau$$

$$\implies s'(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

$$\implies ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

微元法计算曲线长度

- 曲线长度 $\longleftarrow$ 曲线弧长微元的叠加

$$L(\sigma) = \int_{\alpha}^{\beta} ds = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

弧长不依赖于参数的选取

- 曲线 σ 两种参数化可建立互逆双射

$$[a, b] \begin{array}{c} \xrightarrow{t = t(\tau)} \\ \xleftarrow{\tau = \tau(t)} \end{array} [\alpha, \beta]$$

- 曲线上一点的两种表达:

参数表达	坐标表达
$t = t(\tau)$	$(x(t), y(t)), \quad t \in [\alpha, \beta]$
$\tau = \tau(t)$	$(x(\tau), y(\tau)), \quad \tau \in [a, b]$

弧长不依赖于参数的选取续

- 一阶微分形式不变性

$$dx = x'(t)dt = x'(\tau)d\tau, \quad dy = y'(t)dt = y'(\tau)d\tau$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt = \sqrt{(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2}d\tau$$

- 积分变量代换公式

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \xrightarrow{t=\tau(t)} \int_a^b \sqrt{(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2} d\tau$$

- 弧长参数是最自然的参数:

弧长参数和曲线形影不离

- 弧长参数是天生的参数:

当切向量长度是单位长度时, 相应参数是弧长参数

弧长参数的存在性

- 沿着曲线以单位速度行走, 则以移动的距离为参数, 该参数就是弧长参数.

弧长参数的存在性

- 假设曲线 σ 的参数给定为 t , 其速度向量即切向量处处非零. 则可以构造弧长参数 τ 和参数 t 之间的双射

$$[0, L(\sigma)] \xrightleftharpoons[\tau = \tau(t)]{t = t(\tau)} [\alpha, \beta]$$

- $$\tau(t) = \int_{\alpha}^t \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

$$\tau'(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \|\sigma'(t)\|$$

- $$\sigma'(\tau) = \frac{\frac{d\sigma(\tau(t))}{dt}}{\frac{d\tau(t)}{dt}} = \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|}$$

直角坐标系下弧长微分公式

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \stackrel{y=f(x)}{=} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

极坐标系下弧长微分公式

极坐标系(曲线方向选取为参数增加的方向)

$$\begin{cases} x = r(\theta) \cos \theta \\ y = r(\theta) \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [c, d]$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2} d\theta$$

三维空间曲线的弧长微分公式

- 空间曲线

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$$

- 弧长微分

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

- 弧长公式

$$\text{曲线}\sigma\text{的长度} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

例题

求下列心脏线的全长

$$r = a(1 + \cos \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$L \stackrel{\text{对称性}}{=} 2 \int_0^{\pi} a \sqrt{(1 + \cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2} = 8a$$

例题

求下列椭圆的全长

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi], \quad a > b > 0.$$

$$L \stackrel{\text{对称性}}{=} 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 t} dt$$

$$\epsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \text{ 离心率}$$

直角坐标系下平面图形的面积

$$\Omega = \left\{ (x, y) : x \in [a, b], \quad y \in [f_1(x), f_2(x)] \right\}$$

$$\implies \Omega \text{ 的面积} = S = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} 1 \, dy \, dx$$

由微元法看面积的计算

$$\text{微元面积} = (f_2(x) - f_1(x))dx = \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} 1 \, dy \right) dx$$

直角坐标系下平面图形的面积(续)

$$\Omega = \left\{ (x, y) : y \in [c, d], \quad x \in [\phi(y), \varphi(y)] \right\}$$

$$\implies \Omega \text{ 的面积} = S = \int_c^d \int_{\phi(y)}^{\varphi(y)} 1 dx dy$$

由微元法看面积的计算

$$\text{微元面积} = (\phi(y) - \varphi(y)) dy = \left(\int_{\phi(y)}^{\varphi(y)} 1 dx \right) dy$$

在面积的计算中, x, y 的地位相同.

$$\Omega = \{(x, y) : y \in [0, 1], \quad x \in [\sqrt{y}, 2\sqrt{y}]\}$$

计算 Ω 的面积

$$\Omega \text{ 的面积} = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} dx dy = \frac{2}{3}$$

极坐标系下平面图形的面积

$$\Omega = \left\{ (r, \theta) : \theta \in [\alpha, \beta], \quad r \in [0, r(\theta)] \right\}$$

$$\implies \Omega \text{ 的面积} = S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta$$

由微元法看面积的计算

$$\text{微元面积} = \underbrace{\frac{1}{2} \overbrace{r}^{\text{高}} \overbrace{(rd\theta)}^{\text{底边长}}}_{\text{三角形面积微元}}$$

极坐标系下平面图形的面积

$$\Omega = \left\{ (r, \theta) : \theta \in [\alpha, \beta], \quad r \in [r_1(\theta), r_2(\theta)] \right\}$$

$$\implies \Omega \text{ 的面积} = S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (r_2^2(\theta) - r_1^2(\theta)) d\theta$$

例题

求下列心脏线所围面积

$$r = a(1 + \cos \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$S \stackrel{\text{对称性}}{=} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 (1 + \cos \theta)^2 d\theta = \frac{3}{2} \pi a^2$$

第42次作业:

$$[7.1] \quad 1(1)(6), \quad 3(2)(5)$$

数学分析(A1), 第43次课

任广斌(中国科大)

2023-12-25

本次课主要内容

- 积分的几何应用
 - 旋转体体积
 - 旋转体侧面积
- 积分的物理应用
 - 万有引力
 - 变力做功

单变量微积分的触角自然延伸到多变量. 这是微元法的应用.

旋转体体积的计算

- 体积是面积的叠加
- 旋转体的截面是圆, 截面积已知, 利用微元法

旋转体体积=截面积的一重积分.

平面图形(曲边梯形)绕x轴旋转

$$\text{体积微元} = dV = \underbrace{\pi f^2(x)}_{\text{截面积}} dx$$

$$\text{旋转体体积} = \int_a^b \pi f^2(x) dx$$

椭圆绕x轴旋转所得旋转体体积

平面曲线 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

- 体积微元

$$dV = S(x)dx = \pi y^2 dx$$

- 椭球体积

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^a \pi y^2 dx \\ &= \int_{-a}^a \pi b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx \\ &= \frac{4\pi}{3} ab^2 \end{aligned}$$

参数曲线绕x轴旋转的旋转体体积

下列参数曲线绕x轴旋转

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta], \quad \varphi, \psi \in C^1[\alpha, \beta], \quad \varphi' > 0.$$

$$\text{旋转体体积} = \int_{t=\alpha}^{t=\beta} \pi y^2 dx = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t) \varphi'(t) dt$$

星形线

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi], \quad a > 0, \quad x' < 0.$$

半星形线 $t \in [0, \pi]$ 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积

$$\begin{aligned} V &= \pm \int_{t=0}^{t=\pi} \pi y^2 dx = \pm \int_0^\pi \pi (y(t))^2 x'(t) dt \\ &= \pm \int_0^\pi \pi (a \sin^3 t)^2 3a \sin t \cos^2 t dt \\ &= 6\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t \cos^2 t dt = 6\pi a^3 \left(\frac{6!!}{7!!} - \frac{8!!}{9!!} \right) \end{aligned}$$

极坐标曲线绕x轴旋转的旋转体体积

下列围绕原点关于实轴对称的极坐标曲线, 绕x轴旋转

$$r = r(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

旋转体体积微元 = 截面积浓缩于质心所走过的距离 $\times$ 面积

$$= 2\pi\left(\frac{2}{3}r\right) \sin \theta \cdot \frac{1}{2}r(rd\theta)$$

$$\text{旋转体体积} = \int_0^\pi 2\pi\left(\frac{2}{3}r\right) \sin \theta \cdot \frac{1}{2}rrd\theta$$

下列心脏线绕x轴旋转

$$r = a(1 + \cos \theta), \quad \theta \in [-\pi, \pi]$$

旋转体微元体积 = 截面积浓缩于质心所走过的距离 $\times$ 面积

$$= 2\pi\left(\frac{2}{3}r\right) \sin \theta \cdot \frac{1}{2}r(rd\theta)$$

$$\text{旋转体体积} = \int_0^\pi \frac{2}{3}\pi a^3(1 + \cos \theta)^3 \sin \theta d\theta = \frac{8}{3}\pi a^3$$

下列两个圆柱相交部分所围成的体积

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ x^2 + z^2 = a^2 \end{cases}$$

在第一象限, 截面积是以 $\sqrt{a^2 - x^2}$ 为边的正方形

$$V = 8 \int_0^a dV = 8 \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{16}{3} a^3.$$

旋转体侧面积

- 旋转体侧面积局部是台体
- 台体侧面积涉及斜长即弧长

参数曲线绕x轴旋转的旋转体侧面积

下列参数曲线绕x轴旋转

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta], \quad \varphi, \psi \in C^1[\alpha, \beta], \quad \psi > 0$$

$$\text{旋转体侧面微元} = \underbrace{2\pi y}_{\text{旋转台体的周长}} ds$$

$$\text{旋转体侧面积} = \int_{t=\alpha}^{t=\beta} 2\pi y ds = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi \psi(t) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$$

例题

下列椭圆绕x轴旋转

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b$$

求旋转椭球的侧面积

椭圆上半部绕x轴旋转

$$\begin{cases} x = a \cos \theta, \\ y = b \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in (0, \pi)$$

$$S_{\text{侧面积}} = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} 2\pi y ds = \int_0^{\pi} 2\pi b \sin \theta \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} d\theta$$

地球环带面积

- $r =$ 地球半径, $h =$ 纬线平面间距离
- 环带面积

$$S = \underbrace{2\pi r}_{\text{赤道长}} \underbrace{h}_{\text{纬线平面间距离}}$$

- 环带面积与纬度无关, 与放置在赤道情形相同.

地球环带面积证明

$$\text{侧面积} \quad \underline{\underline{\quad}} \quad \int_{y=c}^{y=c+h} 2\pi x ds$$

$$\underline{\underline{\quad}} \quad \int_{y=c}^{y=c+h} 2\pi \sqrt{r^2 - y^2} \sqrt{1 + \left(\frac{y}{\sqrt{r^2 - y^2}} \right)^2} dy$$

$$\underline{\underline{\quad}} \quad 2\pi rh$$

地球环带面积证明(续)

$$\text{侧面积} \quad \underline{\underline{\text{方法二}}} \quad \int_{y=c}^{y=c+h} 2\pi x ds$$

$$\begin{array}{l} \underline{\underline{x=r \cos \theta}} \\ \underline{\underline{y=r \sin \theta}} \end{array} \quad \int_{y=c}^{y=c+h} 2\pi r \cos \theta r d\theta$$

$$\underline{\underline{\quad}} \quad 2\pi r^2 \sin \theta \Big|_{y=c}^{y=c+h} = 2\pi rh$$

物体万有引力

- 质点(质量 m , 位于原点)
- 均匀细棒(质量 M , 位于实轴 $[a, a + l]$)
- $[x, x + dx]$ 质量 = $M \frac{dx}{l}$

$$\text{引力微分} = G \frac{m \cdot (M \frac{dx}{l})}{x^2}$$

$$\text{引力} = \int_a^{a+l} \frac{GmM}{l} \frac{dx}{x^2} = GmM \frac{1}{a(a+l)}.$$

第二宇宙速度

- M = 地球质量, r = 地球半径
- 第二宇宙速度 $\equiv$ 质量 m 由地面移至 ∞ 所需要的初速度 v_0 .

- 以地心为原点, 以天空方向为x轴.
- 质量 m 由地面移至 ∞ 所做的功

$$\text{功微元} = \text{引力} \cdot dx = \frac{GmM}{x^2} dx$$

$$\text{功} = \int_r^{\infty} \frac{GmM}{x^2} dx = \frac{GmM}{r}$$

- 初速 v_0 提供动能 $= \frac{1}{2}mv_0^2$.

功=动能	重力 <u>地面处</u> 地球引力
$\frac{GmM}{r} = \frac{1}{2}mv_0^2$	$mg = G\frac{mM}{r^2}$

$$v_0 = \sqrt{2gr} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 10^{-3} \times 6371} = 11.17 \text{ km/s}$$

g 是重力加速度

- 半球: 球心 $(0, 0, r)$, 半径 $= r$. 它是由

$$\text{半球} \equiv \begin{cases} x^2 + (y - r)^2 = r^2 \\ y \in [0, r] \end{cases} \quad \text{绕} y \text{轴转动}$$

- 将注满水的半球抽干需要做功=变力做功

- 以垂直方向为 y 轴, 某水平方向为 x 轴
- 旋转体积微元 $= \pi x^2 dy$
- 功微元 $= \underbrace{(r - y)}_{\text{所走距离}} \underbrace{\pi x^2 dy}_{\text{重力}}$

变力做功续

$$\text{功} \quad \underline{\underline{=}} \quad \int_0^r (r-y)\pi x^2 dy$$

$$\underline{\underline{=}} \quad \int_0^r (r-y)\pi(r^2 - (y-r)^2) dy$$

$$\underline{\underline{\stackrel{u=r-y}{=}}} \quad \int_0^r u\pi(r^2 - (u^2)) du = \frac{\pi}{4} r^4$$

假设 $a_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}} < +\infty$$

其中, $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{r_k}} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k - r_{k+1}}{\sqrt{r_k}} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{r_{k+1}}^{r_k} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{r_k} - \sqrt{r_{k+1}}) < +\infty\end{aligned}$$

$$\text{假设 } a_n > 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$$

$$\implies \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{s_n} = +\infty$$

$$\text{其中, } s_1 = 0, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{s_k} &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{s_{k+1} - s_k}{s_k} \\ &\geq \sum_{k=2}^{\infty} \int_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{1}{x} dx \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} (\log s_{k+1} - \log s_k) = +\infty\end{aligned}$$

$\exists f \in C[0, +\infty), \quad f(x) \geq 0, \quad \int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, f 无界

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \chi_{A_n}(x), \quad A_n = [n - \frac{1}{n^3}, n + \frac{1}{n^3}] \text{互不相交}$$

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2} < \infty.$$

将 f 修正为连续函数.

例题

$$f \in C^1[0, 1] \implies \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \frac{f(0) - f(1)}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{左} &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n \frac{f(\zeta_n) - f\left(\frac{k}{n}\right)}{\zeta_n - \frac{k}{n}} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(x - \frac{k}{n} \right) dx \quad (\text{积分中值定理}) \\ &= \frac{-1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f'(\eta_n) \frac{1}{n} \quad (\text{微分中值定理}) \\ &= \frac{-1}{2} \int_0^1 f'(x) dx = \text{右} \end{aligned}$$

第43次作业:

[7.1] 5, 7

[7.2] 1, 3

数学分析(A1), 第44次课

任广斌(中国科大)

2023-12-27

本次课主要内容

- 面积原理
- Young不等式

- 面积原理体现的是积分限的分割技巧

积分 $\xrightarrow{\text{转化为}}$ 求和

- 级数=阶梯(局部常值)函数的积分=面积

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\zeta}}, \quad \zeta > 1 \text{ 时收敛}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\zeta} \stackrel[\exists r(\zeta) \in [0,1]]{\zeta \in (-\infty, 1]} \int_1^n \frac{1}{x^\zeta} dx + r(\zeta) + O\left(\frac{1}{n^\zeta}\right)$$

$$r(1) = 0.577 \dots \quad \text{Euler常数,}$$

$$r|_{(-\infty, 0]} = 0.$$

特例
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + 0.577 \dots + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

第一面积原理($\zeta \leq 0$ 情形)

$$f \nearrow \geq 0 \quad f \in C[1, +\infty)$$

$$\implies \left| \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx \right| \leq f(n)$$

通过常值延拓, 初始点可修正.

求和项满足

$$f(k-1) \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \leq f(k)$$

$$\sum_{k=2}^n f(k-1) \leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k f(x) dx \leq \sum_{k=2}^n f(k).$$

$$-f(n) \leq \int_1^n f(x) dx - \sum_{k=1}^n f(k) \leq -f(1) \leq f(n).$$

第二面积原理($\zeta > 0$ 情形)

$$f \searrow 0 \quad f \in C[1, +\infty)$$

$$\xRightarrow{\exists \text{ 常数 } \gamma(f)} \sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^n f(x) dx + \underbrace{\gamma(f)}_{\in [0, f(1)]} + \underbrace{O(f(n))}_{\in [0, f(n)]}$$

$$\text{第二面积原理} \implies \gamma(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx \right)$$

第二面积原理 $\implies \left| \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx - \gamma(f) \right| \leq f(n).$

- 通过常值延拓, 初始点可修正.

$$g(n) := \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx$$

$$\xrightarrow[g(1)=f(1)]{g \searrow \geq 0} \quad \gamma(f) := \lim_{n \rightarrow \infty} g(n) \in [0, g(1)]$$

$g \searrow \geq 0$ 的证明:

$$g(n) := \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx = \sum_{k=1}^{n-1} \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(x) dx \right) + f(n) \geq 0$$

$$g(n) - g(n+1) = \int_n^{n+1} f(x) dx - f(n+1) \geq 0.$$

$$g(n) := \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x)dx \searrow \geq 0, \quad \gamma(f) = \lim_{p \rightarrow +\infty} g(p)$$

$$g(n) - \gamma(f) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\int_n^p f(x)dx - \sum_{k=n+1}^p f(k) \right)$$

$$\in [0, f(n)]$$

离散求和的连续化

$$f \searrow 0 \quad f \in C[1, +\infty)$$

$$\implies \sum_{k=1}^{\infty} f(k), \quad \int_1^{\infty} f(x) dx \quad \text{同敛散.}$$

第二面积原理 $\implies$ 级数和积分同敛散.

$$f(n) \leq \int_{n-1}^n f(x) dx \leq f(n-1) \implies \text{级数和积分同敛散.}$$

$\varphi \in C[0, +\infty)$, $\varphi \geq 0$, φ 严格单调增加, $\varphi(0) = 0$

$$\psi = \varphi^{-1}$$

$$a \geq 0, \quad 0 \leq b \leq \varphi(+\infty)$$

$$\implies ab \leq \int_0^a \varphi(x) dx + \int_0^b \psi(x) dx.$$

$$\text{等号成立} \iff b = \varphi(a)$$

当 $b = \varphi(a)$ 时

长方形面积=两个曲边三角形面积之和

- Young不等式是分离提纯方法
- Young不等式将乘法化为加法

共轭指数

- 一对共轭指数 p, q

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p, q \geq 1.$$

- 共轭指数例子

$$(p, q) = (2, 2), \quad (1, +\infty), \quad (+\infty, 1).$$

设 p, q 是共轭指数, $p, q > 1$, $a, b \geq 0$

$$\implies ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

等号成立 $\iff a^p = b^q$

$$\text{取 } \varphi(x) = x^{p-1}, \quad \psi(y) = y^{q-1}$$

$$\implies ab \leq \int_0^a x^{p-1} dx + \int_0^b y^{q-1} dy = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

$$\text{等号成立} \iff b = \varphi(a) = a^{p-1} \iff a^p = b^q$$

Hölder不等式(离散版本)

设 p, q 是共轭指数,

$$a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n, \quad b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}_+^n$$

$$\implies | \langle a, b \rangle | \leq \|a\|_p \|b\|_q$$

$$\text{等号成立} \iff (a_1^p, \dots, a_n^p) \parallel (b_1^q, \dots, b_n^q)$$

$$\|a\|_p := \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p}$$

$$\|b\|_q = \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{1/q}$$

不妨设 a, b 非零. 只要证

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{|a_i|^p}{\|a\|_p^p} \right)^{1/p} \left(\frac{|b_i|^q}{\|b\|_q^q} \right)^{1/q} \leq 1$$

$$\text{Yong} \implies \text{左} \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{p} \frac{|a_i|^p}{\|a\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|b_i|^q}{\|b\|_q^q} \right) = 1.$$

Hölder不等式(连续版本)

设 p, q 是共轭指数, $f, g \in R^+[a, b]$

$$\implies |\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

等号成立 $\iff |f|^p, |g|^q$ 相差常数因子几乎处处相等.

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

$$\|g\|_q = \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q}$$

不妨设 $\|f\|_p, \|g\|_q$ 非零. 只要证

$$\int_a^b \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} dx \leq 1 \quad (\text{Young不等式})$$

Minkowski三角不等式

$$f, g \in L^p[a, b], \quad p \in [1, +\infty]$$

$$\implies \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

等号成立 $\iff f, g$ 相差常数因子几乎处处相等.

$$\begin{aligned} & \|f + g\|_p^p \\ & \leq \int_a^b |f(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} dx + \int_a^b |g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} dx \\ & \leq \|f\|_p \|f + g\|_p^{p/q} + \|g\|_p \|f + g\|_p^{p/q} \end{aligned}$$

假设 $f \in R[a, b]$, 则

$$\left(\int_a^b |f(x)| \cos x dx \right)^2 + \left(\int_a^b |f(x)| \sin x dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b |f(x)| dx \right)^2$$

利用Hölder不等式

$$\begin{aligned}\text{左边} &\leq \int_a^b |f(x)| dx \int_a^b |f(x)| \cos^2 x dx + \int_a^b |f(x)| dx \int_a^b |f(x)| \sin^2 x dx \\ &\leq \text{右边}\end{aligned}$$

例题

$$f \in C[0, 1],$$

$$\int_x^1 f(t) dt \geq \frac{1-x^2}{2}, \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$\implies \int_0^1 f^2(t) dt \geq \frac{1}{3}.$$

$$F(t) := \int_t^1 f(x)dx \geq \frac{1-t^2}{2}$$

$$\frac{1}{3} \int_0^1 f^2(t)dt \geq \left(\int_0^1 tf(t)dt \right)^2 \quad (\text{Hölder不等式})$$

$$= \left(\int_0^1 t dF(t) \right)^2 \quad (\text{分部积分公式})$$

$$= \left(\int_0^1 F(t)dt \right)^2 \geq \frac{1}{9}$$

例题

$$f \in C^1[0, 1],$$

$$\implies \max_{x \in [0, 1]} |f'(x)| \leq |f(1) - f(0)| + \int_0^1 |f''(x)| dx$$

证明 $f(1) - f(0) = f'(\zeta)$ (微分中值定理)

$$\max_{x \in [0, 1]} |f'(x)| = |f'(\eta)| \quad (\text{介值定理})$$

$$f'(\eta) = f'(\zeta) + \int_{\zeta}^{\eta} f''(x) dx \quad (\text{Newton-Leibniz公式})$$

第44次作业:

[7.3] 1, 2, 7

问题 1, 2, 3

数学分析(A1), 第45次课

任广斌(中国科大)

2023-12-29

本次课主要内容

- 唯一性定理
- 稠密性定理
- 从方程的角度观察中值定理

唯一性定理

$$f \in C[a, b]$$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0, \quad \forall g \in C[a, b], \quad g(a) = g(b) = 0$$

$$\implies f = 0.$$

取 $g(x) = f(x) \sin\left(\frac{x-a}{b-a}\pi\right)$

- 在端点退化的非负光滑函数

$$\sin\left(\frac{x-a}{b-a}\pi\right)$$

唯一性定理

$$f \in C[a, b]$$

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = 0, \quad \forall g \in C^1[a, b], \quad g(a) = g(b) = 0$$

$$\implies f = C.$$

- 思路

$$f(x) = c \iff \int_a^b (f(x) - c) dx = 0, \quad \int_a^b (f(x) - c)^2 dx = 0.$$

- 证明: 取

$$c = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b (f(x) - c)^2 dx = 0 \iff \int_a^b f(x)(f(x) - c) dx = 0$$

$$\text{取 } g(x) \frac{g'(x) := f(x) - c}{g(a) = g(b) = 0} \int_a^x (f(t) - c) dt$$

- 通过极限的触角将问题归结于正则情形

正则情形 $\xrightarrow[\text{极限过程}]{\text{稠密性}}$ 一般情形

Riemann可积函数分段线性连续逼近

- $f \in R[a, b] \xrightarrow{n\text{等分}[a, b]} \text{分段线性连续函数 } f_n$
- 在分割的第*i*个区间:
 - $f_n(x)$ 是线性函数, 不妨设 ↗
 - $f(\text{左端点}) \leq f_n(x) \leq f(\text{右端点})$
 - $|f(x) - f_n(x)| \leq \max\{|f(x) - f(\text{右端点})|, |f(x) - f(\text{左端点})|\} \leq \omega_i$

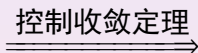
稠密性定理

$\forall f \in R[a, b], \quad f_n = \text{曲线 } f \text{ 的 } n \text{ 等分 } [a, b] \text{ 割线}$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \xrightarrow{\text{在 } L^1[a, b] \text{ 收敛}} f$$

$f \in R[a, b]$, f_n 是 f 的 n 等分割线

控制收敛定理



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) g(x) dx \stackrel{\forall g \in R[a, b]}{=} \int_a^b f(x) g(x) dx$$

$f \in R[a, b]$, f_n 是 f 的 n 等分割线

$$\begin{aligned} \implies \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f_n(x) - f(x)| dx \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = 0 \end{aligned}$$

$f \in R[a, b]$, f_n 是 f 的 n 等分割线

$\implies f_n$ 一致有界, $f_n(a) = f(a)$, $f_n(b) = f(b)$

$\implies$ 若 f 单调, 则 f_n 单调. 若 f 严格单调, 则 f_n 严格单调.

稠密性定理

$$R[a, b] \subset \overline{\left\{ [a, b] \text{ 逐段线性连续函数} \right\}}^{L^1[a, b]}$$

$\forall f \in R[a, b], \quad \exists \varphi_n \in \{[a, b] \text{ 逐段线性连续函数}\} :$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - \varphi_n(x)| dx = 0.$$

逐段线性连续 $\xrightarrow{\text{稠密性}}$ *Riemann*可积函数

Newton-Leibniz公式对于 $[a, b]$ 上逐段线性连续成立

$$f \in R[a, b] \implies \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin(\lambda x) dx = 0$$
$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \cos(\lambda x) dx = 0.$$

- f 是逐段线性连续函数

$$\int_a^b f(x) \cos(\lambda x) dx \xrightarrow{\text{分部积分}} f(x) \frac{\sin \lambda x}{\lambda} \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \frac{\sin \lambda x}{\lambda} dx$$

$$\longrightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow \infty)$$

- $f \in R[a, b]$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_a^b f(x) \cos(\lambda x) dx - \int_a^b f_n(x) \cos(\lambda x) dx \right|$$

$$\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx = 0$$

积分第二中值定理

$$\int_a^b fg \stackrel[f \text{ 单调}, \exists \zeta \in [a, b]}{f, g \in R[a, b]} f(a) \int_a^\zeta g + f(b) \int_\zeta^b g.$$

证明

不妨设 $g \in C[a, b]$.

$$f_n := f \text{ 的 } n \text{ 等分割线}, \quad G(x) = \int_a^x g$$

$$\int_a^b fg \quad \xlongequal{\quad\quad\quad} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n g$$

$$\xlongequal{\text{分部积分}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n G|_a^b - \int_a^b G f'_n)$$

$$\xlongequal{\text{中值定理}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n G|_a^b - G(\zeta_n) \int_a^b f'_n$$

$$\xlongequal{\text{可设 } \zeta_n \rightarrow \zeta} \quad f G|_a^b - G(\zeta)(f(b) - f(a))$$

$$\xlongequal{\quad\quad\quad} \quad f(a)(G(\zeta) - G(a)) + f(b)(G(b) - G(\zeta))$$

积分第二中值定理

$$\int_a^b fg \quad \frac{f, g \in R[a, b]}{f \searrow \geq 0, \exists \zeta \in [a, b]} \quad f(a) \int_a^\zeta g.$$

$f_n := f$ 的 n 等分割线,

$$G(x) = \int_a^x g, \quad M = \max_{x \in [a,b]} G(x), \quad m = \min_{x \in [a,b]} G(x)$$

$$\begin{aligned} \int_a^b fg & \quad \quad \quad f(a) \int_a^\zeta g + f(b) \int_\zeta^b g \\ & \quad \quad \quad (f(a) - f(b))G(\zeta) + f(b)G(b) \in [f(a)m, f(a)M] \end{aligned}$$

介值定理

$$f(a)G(\eta)$$

$\varphi \in C[0, +\infty)$, $\varphi \geq 0$, φ 严格单调增加, $\varphi(0) = 0$

$$\psi = \varphi^{-1}$$

$$a \geq 0, \quad 0 \leq b \leq \varphi(+\infty)$$

$$\implies ab \leq \int_0^a \varphi(x) dx + \int_0^b \psi(x) dx.$$

$$\text{等号成立} \iff b = \varphi(a)$$

不妨设 $\varphi \in C^1[0, \infty)$. 不妨设 $b \leq \varphi(a)$.

$b \in [\varphi(0), \varphi(a)] \xrightarrow{\text{介值定理}} \text{存在 } c \in [0, a] : b = \varphi(c)$

$$\begin{aligned} \int_0^c \varphi(x) dx + \int_0^b \psi(y) dy &\stackrel{\substack{x=\psi(y) \\ y=\varphi(x)}}{=} \int_0^c \varphi(x) dx + \int_0^c x \varphi'(x) dx \\ &==== \int_0^c (x \varphi(x))' dx = cb \end{aligned}$$

$$\int_c^a \varphi(x) dx \geq \varphi(c)(a - c) = b(a - c).$$

相加即可.

函数的两个零点 $\xrightarrow{\text{诱导}}$ 导函数的一个零点

原函数和分部积分的应用

$$f \in C[0, \pi], \quad \int_0^{\pi} f(x) dx = 0, \quad \int_0^{\pi} f(x) \cos x dx = 0$$

$$\implies \exists \text{互不相同 } \zeta_1, \zeta_2 \in (0, \pi) : \quad f(\zeta_1) = f(\zeta_2) = 0$$

以原函数为出发点研究函数.

证明

$$F(x) := \int_0^x f \quad F(0) = F(\pi) = 0$$

$$0 = \int_0^\pi f(x) \cos x dx \xrightarrow{\text{分部积分}} \int_0^\pi F(x) \sin x dx$$

$\implies$ F 存在零点 $\zeta \in (0, \pi)$

$\xrightarrow[\text{Rolle}]{F(0)=F(\zeta)=F(\pi)=0}$ 结论成立

Lagrange插值多项式

- 给定 $(x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$, $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

- Lagrange基本多项式

$$l_i(x) = \frac{(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}$$

- Lagrange基本多项式

$$l_i(x_j) = \delta_{ij}$$

- Lagrange插值多项式

$$\sum_{i=1}^n l_i(x) f(x_i)$$

Lagrange插值多项式余项估计

f 在 $[a, b]$ n 阶可导 (边界点条件可减弱)

$$a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq b$$

$$\xRightarrow{\exists \zeta \in (a, b)} f(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) l_i(x) + \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!} \prod_{i=1}^n (x - x_i)$$

从方程求根的观点看待中值定理

- 下列函数以 $c, x_1, \dots, x_n$ 为 $n+1$ 个不同零点:

$$f(x) - \sum_{i=1}^n f(x_i) l_i(x) - \left(f(c) - \sum_{i=1}^n f(x_i) l_i(c) \right) \frac{\prod_{k=1}^n (x - x_k)}{\prod_{k=1}^n (c - x_k)}$$

- 上述函数的 n 阶导数存在零点, 故

$$f^{(n)}(\zeta) - \left(f(c) - \sum_{i=1}^n f(x_i) l_i(c) \right) \frac{n!}{\prod_{k=1}^n (c - x_k)} = 0$$

- 极限过程 $\implies$ 对任意 c 正确

$n = 1$ 的Lagrange插值多项式余项估计 = 关于割线的中值定理

从解方程的观点看待Lagrange 中值定理

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ 方程存在根,}$$

归结于下列方程有两个根

$$\underbrace{f(x)}_{\text{曲线方程}} = \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)}_{\text{割线方程}}$$

该方程来自于上述方程两边积分

例题

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad |f^{(n)}(x)| \leq M, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\implies f \equiv 0$$

证明: f 有无穷多个零点, 以 0 为聚点, $f(0) = 0$.

函数的两个零点产生导函数的一个零点.

$$\xRightarrow{\text{同理}} f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = \cdots = 0.$$

$$f(x) \xRightarrow{\text{Taylor展开}} \frac{f^{(k)}(\theta x)}{k!} x^k \implies |f(x)| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

例题

$$\sum_{p \text{ 素数}} \frac{1}{p} = +\infty.$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} &\leq \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{p_j} + \frac{1}{p_j^2} + \cdots\right) \quad (n \text{ 的素数分解}) \\ &= \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_j}} \\ &\leq e^{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{p_j}} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{1-x} \leq 1 + 2x \leq e^{2x}, \quad \forall x \in [0, \frac{1}{2}]\right)$$

从分部积分的观点看待带有积分余项的Taylor展开

$$\begin{aligned}I_n &:= \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt = \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} df^{(n)}(t) \\&= I_{n-1} - \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) = \dots \\&= I_0 - \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) - \dots - \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) \\&= f(x) - f(x_0) - \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) - \dots - \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)\end{aligned}$$

分析是极限的艺术